# Problemas comentados

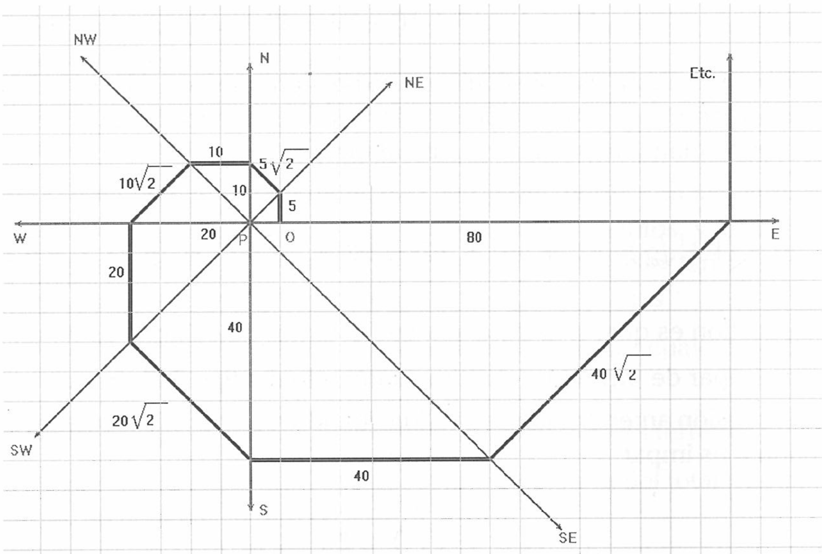
## A cargo del Club Matemático

Uno de los temas propuestos para el Día Escolar de la Matemática 2003 es el relativo a las proyecciones sobre planos, cálculos sobre superficies no planas y otros temas que relacionan matemática y cartografía. Es por ello que pretendemos traer a estas páginas algunos problemas que, conocidos o no, pueden encajar en la temática que mencionamos. El problema número 8 del recorrido en espiral, con las menciones a la situación cardinal con respecto al poste, puede ser un punto de arranque.

### Problema nº 8:

*Un hombre está de pie en una llanura, a 5 m al este de un poste, y mirando al norte. Camina recto hacia el norte hasta que se sitúa directamente al nordeste del poste; entonces, siempre en línea recta, camina al noroeste hasta que está directamente al norte del poste; entonces camina hacia el oeste hasta que está directamente al noroeste del poste; y sigue así, describiendo una línea poligonal en espiral. Cuando de nuevo está situado al este del poste, ¿cuántos metros ha recorrido? Encontrar una fórmula, con d = distancia desde el poste, y n = número de segmentos caminados.*

*(Barr, S. "Mathematical Brain Benders"; Dover)*



Y para resolverlo nos ayudamos de una técnica de resolución de problemas que muchas veces infravaloramos cara a nuestros alumnos: el uso de gráficos, esquemas y dibujos que ayuden a visualizar el problema y su solución.

En este caso, la figura representa el trayecto que sigue el hombre desde que parte en su camino espiral, con el poste situado en el punto P, y el inicio del camino en el punto O. Como muestra el diagrama, cada segmento caminado es uno de los dos lados iguales de los triángulos rectángulos isósceles, múltiplos de 5 cuando camina en la dirección N-S o E-W, y múltiplos de $\sqrt{2}$ los trayectos en diagonal. Las denominamos $S_i$ y $S_p$.

$$S_i = 5 + 10 + 20 + 40 + 80 + ... = 5 \cdot 2^0 + 5 \cdot 2^1 + 5 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^3 + ...$$

para los trayectos 1º, 3º, 5º, 7º, ...

$$S_p = 5 \cdot \sqrt{2} + 10 \cdot \sqrt{2} + 20 \cdot \sqrt{2} + ... = 5 \cdot 2^0 \sqrt{2} + 5 \cdot 2^1 \sqrt{2} + 5 \cdot 2^2 \sqrt{2} + 5 \cdot 2^3 \sqrt{2} + ...$$

para los trayectos 2º, 4º, 6º, ...

Tenemos entonces dos series: una de los trayectos impares, múltiplos de 5, y otra para los trayectos pares, múltiplos de $\sqrt{2}$ . La suma de ambas series nos dará el camino recorrido, **d**, hasta la finalización del trayecto a considerar.

$$\mathbf{d} = 5 + 10 + 20 + 40 + ... + 5 \cdot \sqrt{2} + 10 \cdot \sqrt{2} + 20 \cdot \sqrt{2} + ... =$$

$$(1 + \sqrt{2}) \cdot (5 + 10 + 20 + 40 + ...)$$

La cuestión ahora es conseguir una expresión que nos relacione la distancia recorrida **d** con el número de trayectos realizados **n**. Podemos escribir la última expresión de esta manera:

$$d = (1 + \sqrt{2}) \cdot (5 \cdot 2^0 + 5 \cdot 2^1 + 5 \cdot 2^2 + 5 \cdot 2^3 + ...) = (1 + \sqrt{2}) \cdot \left( \sum_{n=0}^{n} 5 \cdot 2^n \right)$$

La cuestión es que, si la distancia que estamos calculando es de un número impar de trayectos, el último sumando del tipo $5 \cdot 2^n \sqrt{2}$ nos sobra. La expresión anterior es, pues, válida cuando n es par, y la siguiente para cuado n es impar:

$$\mathbf{d} = (1 + \sqrt{2}) \cdot \left( \sum_{n=0}^{n} 5 \cdot 2^n \right) - 5 \cdot 2^n \sqrt{2}$$