

Cuatro colores bastan o cómo colorear un mapa¹

Robin Wilson

El origen del problema

En octubre de 1852 Francis Guthrie, un alumno de Augustus de Morgan (Catedrático de matemáticas del University College London), se encontraba coloreando un mapa de Inglaterra. Observó que si debía utilizar diferentes colores, para las regiones colindantes, entonces sólo necesitaba cuatro. Se preguntó, *¿basta con cuatro colores para colorear cualquier mapa por complicado que sea?*



Francis Guthrie

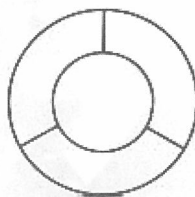
[A continuación describía el problema y daba el siguiente ejemplo de un mapa para el que se necesitaban cuatro colores.]

Cuestión: *¿no es posible inventar un mapa para el que se necesiten cinco o más colores?*

De Morgan también escribió sobre el problema en una carta enviada al filósofo William Whewell, Master del Trinity College de Cambridge. El problema apareció, impreso por primera vez, en la mitad de la revisión (hecha por De Morgan) y no firmada del libro de Whewell *Philosophy of Discovery*. Tal revisión contiene el siguiente y muy extraño pasaje:

El 23 de Octubre, de ese mismo año, Frederick hermano de Francis, propuso el problema a De Morgan, quien inmediatamente quedó fascinado y lo comunicó a sus amigos. La famosa carta que De Morgan envió, el 23 de octubre de 1852, al físico matemático irlandés Sir William Rowan Hamilton incluía el siguiente párrafo:

Uno de mis alumnos me a pedido hoy que le proporcione una razón para un hecho que yo mismo desconocía como tal, incluso aún desconozco si lo es o no.



¹ Este artículo apareció originariamente en inglés en *Newsletter of the European Mathematical Society*, issue 46, December 2002. Agradecemos a su editor y autor el permiso para traducirlo y publicarlo en *NÚMEROS*.

Hasta hoy es bien conocido, por todos los que colorean mapas, que basta con cuatro colores. Como dice Hotspur, dejemos que las regiones serpenteen con tantas y raras convoluciones como el diseñador les atribuya; dejémoslas que vengan y vayan retorciéndose de tal manera que sería bastante absurdo que la ordenanza de la Reina dijera al sheriff que A. B. pudieran correr de un lado al otro en sus dominios: incluso así, sería suficiente con cuatro colores para cumplir con las distinciones requeridas...

Después de esto, el problema fue olvidado durante mucho tiempo hasta el 13 de junio de 1878, siete años antes de la muerte de De Morgan, cuando Arthur Cayley, del Trinity College de Cambridge, preguntó en una reunión de la London Mathematical Society si el problema de los cuatro colores había sido resuelto. Aun cuando Cayley fue incapaz de resolverlo, si fue capaz de explicar dónde radicaba la dificultad, y mostró como podía simplificarse el problema (sin pérdida de generalidad) considerando únicamente mapas en los que, en cualquier punto, se encuentran exactamente tres regiones.

La falaz demostración de Kempe



Alfred Kempe (1849-1922)

Una célebre demostración de que es suficiente con cuatro colores fue proporcionada en 1879 por Alfred Kempe, un letrado de la curia londinense que había estudiado con Cayle en Cambridge y que más tarde fue Tesorero de la Royal Society durante muchos años. Ésta es, con toda probabilidad, la demostración más falaz en la historia de las matemáticas, a pesar de contener bastantes buenas ideas.

En esencia, la demostración de Kempe es como sigue. Asumimos que hemos coloreado utilizando cuatro colores *todas las regiones de un mapa menos una*, a continuación muestra como el coloreado se puede extender siempre a la última región. Ya que todos los mapas con cuatro regiones se pueden colorear con cuatro colores, podemos extender el coloreado a 5, 6, 7,...regiones, esto es a cualquier mapa. Ahora, a partir de la bien conocida fórmula de Euler para los poliedros, es fácil deducir que *cualquier mapa tiene una región con a lo sumo cinco vecinas* – un digon (región con dos lados), triángulo, cuadrado o pentágono. Kempe trata cada caso por orden.