Juegos matemáticos en la enseñanza[1]

Miguel de Guzmán Ozámiz

A good mathematical joke is
better and better mathematics
than a dozen mediocre papers
(J.E. Littlewood, A Mathematician´s Miscellany).

Matemáticas y juegos

¿Dónde termina el juego y dónde comienza la matemática seria? Una pregunta capciosa que admite múltiples respuestas. Para muchos de los que ven la matemática desde fuera, ésta, mortalmente aburrida, nada tiene que ver con el juego. En cambio, para los más de entre los matemáticos, la matemática nunca deja totalmente de ser un juego, aunque además de ello pueda ser otras muchas cosas.

El juego bueno, el que no depende de la fuerza o maña físicas, el juego que tiene bien definidas sus reglas y que posee cierta riqueza de movimientos, suele prestarse muy frecuentemente a un tipo de análisis intelectual cuyas características son muy semejantes a las que presenta el desarrollo matemático. Las diferentes partes de la matemática tienen sus piezas, los objetos de los que se ocupa, bien determinados en su comportamiento mutuo a través de las definiciones de la teoría. Las reglas válidas de manejo de estas piezas son dadas por sus definiciones y por todos los procedimientos de razonamiento admitidos como válidos en el campo. Cuando la teoría es elemental, estos no son muchos ni muy complicados y se adquieren bien pronto, lo cual no quiere decir que el juego sea trivial. Elemental quiere decir cerca de los elementos iniciales y no necesariamente simple. Existen problemas elementales desproporcionadamente complicados con respecto a su enunciado. Un ejemplo lo constituye el problema de averiguar el mínimo de las figuras en las que una aguja unitaria puede ser invertida en el plano por movimientos continuos. Cuando la teoría no es elemental es generalmente porque las reglas usuales del juego se han desarrollado extraordinariamente en número y en complejidad y es necesario un intenso esfuerzo para hacerse con ellas y emplearlas adecuadamente. Son herramientas muy poderosas que se han ido elaborando, cada vez más sofisticadas, a lo largo de los siglos. Tal es, por ejemplo, la teoría de la medida e integral de Lebesgue en el análisis superior.

---

[1] Este artículo se publico originariamente en las *Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas,* que se celebraron en Santa Cruz de Tenerife del 10 al 14 Septiembre 1984 y que supuso la primera colaboración de Miguel con la Sociedad Canaria «Isaac Newton»de Profesores de Matemáticas.

La matemática así concebida es un verdadero juego que presenta el mismo tipo de estímulos y de actividad que se da en el resto de los juegos intelectuales. Uno aprende las reglas, estudia las jugadas fundamentales, experimentando en partidas sencillas, observa a fondo las partidas de los grandes jugadores, sus mejores teoremas, tratando de asimilar sus procedimientos para usarlos en condiciones parecidas, trata finalmente de participar más activamente enfrentándose a los problemas nuevos que surgen constantemente debido a la riqueza del juego, o a los problemas viejos aún abiertos esperando que alguna idea feliz le lleve a ensamblar de modo original y útil herramientas ya existentes o a crear alguna herramienta nueva que conduzca a la solución del problema.

Por esto no es de extrañar en absoluto que muchos de los grandes matemáticos de todos los tiempos hayan sido agudos observadores de los juegos, participando muy activamente en ellos, y que muchas de sus elucubraciones, precisamente por ese entreveramiento peculiar de juego y matemática, que a veces los hace indiscernibles, hayan dado lugar a nuevos campos y modos de pensar en lo que hoy consideramos matemática profundamente seria.

Impacto de los juegos en la historia de la matemática.

La historia antigua no ha sido inclinada a preservar sino los elementos solemnes de la actividad científica, pero uno no puede menos de sospechar que muchas de las profundas cavilaciones de los pitagóricos, por ejemplo alrededor de los números, tuvieron lugar jugando con configuraciones diferentes que formaban con las piedras. El llamado *problema bovino de Arquímedes*, álgebra hecha con procedimientos rudimentarios, tiene un cierto sabor lúdico, así como otras muchas de sus creaciones matemáticas originales. *Euclides* fue, al parecer, no sólo el primer gran pedagogo que supo utilizar, en una obra perdida llamada *Pseudaria* (Libro de Engaños), el gran valor didáctico en matemática de la sorpresa producida por la falacia y la aporía.

En la Edad Media *Leonardo de Pisa* (ca.1170-ca.1250), mejor conocido hoy y entonces como Fibonacci, cultivó una matemática numérica con sabor a juego con la que, gracias a las técnicas aprendidas de los árabes, asombró poderosamente a sus contemporáneos hasta el punto de ser proclamado oficialmente por el emperador Federico II como *Stupor Mundí*.

En la Edad Moderna *Gerónimo Cardano* (1501-1576), el mejor matemático de su tiempo, escribió el *Líber de ludo aleae*, un libro sobre juegos de azar, con el que se anticipó en más de un siglo a Pascal y Fermat en el tratamiento matemático de la probabilidad. En su tiempo, como tomando parte en este espíritu lúdico, los duelos medievales a base de lanza y escudo dieron paso a los duelos intelectuales consistentes en resolver ecuaciones algebraicas cada vez más difíciles, con la participación masiva, y más o menos deportiva, de la población estudiantil, de Cardano mismo y otros contendientes famosos como Tartaglia y Ferrari.

El famoso problema del Caballero de Meré, consistente en saber cómo deben ser las apuestas de dos jugadores que, habiendo de alcanzar n puntos con sus dados, uno ha obtenido p y el otro q puntos en una primera jugada, fue propuesto por Antoine Gobaud, Caballero de Meré (1610-1685) a Pascal (1623-1662). De la correspondencia entre éste y Fermat (1601-1665) a propósito del problema surgió la moderna teoría de la probabilidad.

Leibniz (1646-1716) fue un gran promotor de la actividad lúdica intelectual: "Nunca son los hombres más ingeniosos que en la invención de los juegos... Sería deseable que se hiciese un curso entero de juegos, tratados matemáticamente", escribía en una carta en 1715. Y en particular comenta en otra carta en 1716 lo mucho que le agrada el ya entonces popular solitario de la cruz, y lo interesante que le resulta el jugarlo al revés.

En 1735, Euler (1707-1783), oyó hablar del problema de los siete puentes de Königsberg, sobre la posibilidad de organizar un paseo que cruzase todos y cada uno de los puentes una sola vez (camino euleriano). Su solución constituyó el comienzo vigoroso de una nueva rama de la matemática, la teoría de grafos y con ella de la topología general.

También el espíritu matemático de la época de Euler participaba fuertemente del ánimo competitivo de la época de Cardano. *Johann Bernoulli* (1667-1748) lanza el problema de la braquistócrona como un reto a los mejores matemáticos de su tiempo. En este duelo participaron con ardor nada menos que Jakod Bernoulli (creador, precisamente con su solución al problema, del cálculo de variaciones) Leibniz, Newton y Huygens.

Se cuenta que *Hamilton* (1805-1865) sólo recibió dinero directamente por una de sus publicaciones y ésta consistió precisamente en un juego matemático que comercializó con el nombre de *Viaje por el Mundo*. Se trataba de efectuar por todos los vértices de un dodecaedro regular, las ciudades de ese mundo, un viaje que no repitiese visitas a ciudades circulando por los bordes del dodecaedro y volviendo al punto de partida (camino hamiltoniano). Esto ha dado lugar a un problema interesante en teoría de grafos que admiten un camino hamiltoniano.

Los biógrafos de *Gauss* (1777-1855) cuentan que el *Princeps Mathematicorum* era un gran aficionado a jugar a las cartas y que cada día anotaba cuidadosamente las manos que recibía para analizarlas después estadísticamente.