LOS LÍMITES DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

Tomemos un conjunto de axiomas de la aritmética elemental, por ejemplo el de los axiomas de Peano. Definamos adecuadamente las operaciones de suma y producto. A partir de ahí, podemos llegar a probar una curiosa propiedad de los números naturales, ya conocida

Axiomas de Peano

A_1. 0 es un número natural.
A_2. Todo número natural tiene un siguiente.
A_3. Dos números naturales con igual siguiente son a su vez iguales.
A_4. 0 no es siguiente de ningún número natural.
A_5. Un conjunto X que contenga a 0 y que si contiene a n contiene a su siguiente, contiene a todos los números naturales.

por los griegos: la suma de los n primeros números impares es n^2. Llamemos T a este enunciado:

$$T: 1 + 3 + 5 + \ldots.. + (2n-1) = n^2$$

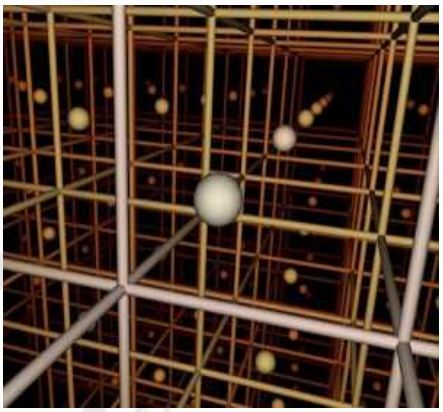
Si deseamos probar T, es seguro que debemos apoyarnos para ello en A_5, el llamado *axioma de inducción*, que reza así

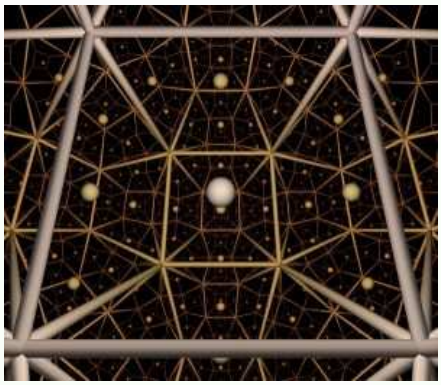
A_5: *Un conjunto X que contenga a 0 y que si contiene a n contiene a su siguiente, contiene a todos los números naturales.*

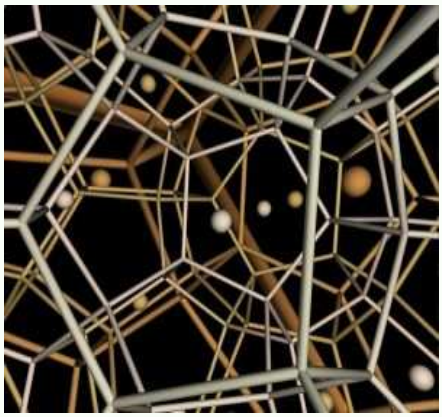
No hay escapatoria posible, pues el teorema T está en una rama que parte del tronco A_5: se necesita A_5 para probar T. Por lo tanto, si del conjunto de axiomas de la aritmética se elimina el A_5, del conjunto de fórmulas válidas en aritmética habrá que eliminar T. Pero T es una fórmula que no carece en absoluto de sentido; es más, puede *comprobarse* para todo *n*, y *siempre* es cierta. Nunca falla. Es una fórmula verdadera, pero no demostrable, a menos que A_5 se incorpore a los axiomas.

El conjunto de axiomas amputado de A_5 se dice que es *incompleto*, pues no toda fórmula "legal" es susceptible de ser probada. Cuando toda fórmula verdadera puede ser probada, el sistema de axiomas se llama *completo*.

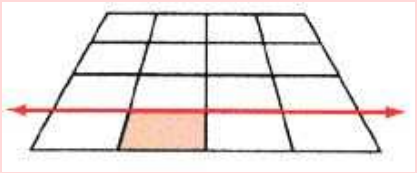
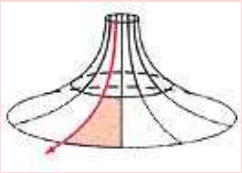
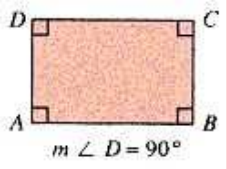
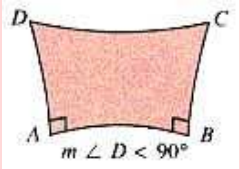
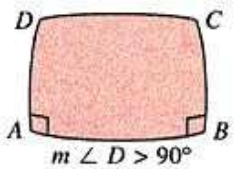
Veamos ahora lo que se entiende por axiomas independientes. Un ejemplo histórico es lo mejor en este caso, sobre todo si el axioma es tan conocido como éste: *"Por un punto exterior a una recta pasa una, y una sola, paralela a ella*." Euclides y centenares de sus sucesores se esforzaron estérilmente en intentar demostrarlo a partir del resto de los axiomas de la geometría. A todos les parecía que no era un axioma, sino un teorema, deducible por tanto de los axiomas. Pero todos estaban equivocados, tal como demostraron Gauss (1777-1855), Bolyai (1802-1860), Lobachevski (1792-1856) y Riemann (1826-1866). Era un axioma, y no podía probarse a partir de los otros axiomas. Este hecho se describe matemáticamente diciendo que el axioma de las paralelas es *independiente* del resto.


Euclíd-Bolas


Hyperb-Bolas

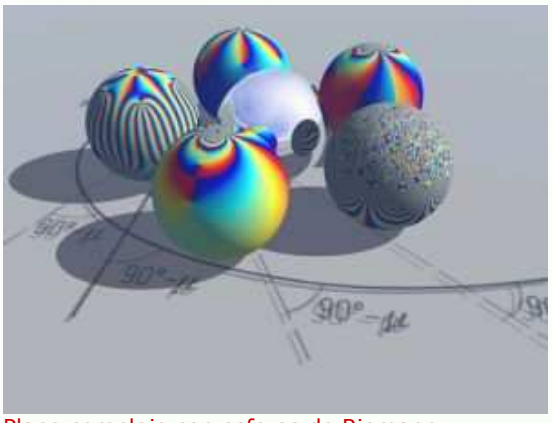

Esfer-Bolas

El procedimiento de prueba que usaron Gauss, Bolyai y Lobachevski es muy instructivo: supusieron que el axioma no era cierto y postularon que por un punto exterior pasa *más de una* paralela. Riemann supuso también que no era cierto, pero él se inclinó por la hipótesis de que no pasara *ninguna* paralela. Ambas suposiciones eran en aquellos tiempos peores que un sacrilegio; sin embargo, y de modo extraño, aceptándolas no se llegaba a ninguna contradicción. Sencillamente, se obtenían dos geometrías (la *hiperbólica* y la *elíptica*) distintas de la euclídea, pero sin contradicciones. Todavía más: no tardó en demostrarse que si alguna de las dos nuevas geometrías llegara a presentar una contradicción, también sería automáticamente contradictoria la geometría de Euclides. Las geometrías no euclídeas eran, por lo tanto, *consistentes*. Consistencia significa, pues, que no hay contradicciones. Con más precisión, un sistema de axiomas es consistente cuando no es posible probar a la vez un teorema y su contrario.

Euclides	**Lobachevsky - Bolyai**	**Riemann**
Geometría Plana	Geometría Hiperbólica	Geometría Elíptica
		
		

Geometría plana, Geometría hiperbólica y Geometría elíptica

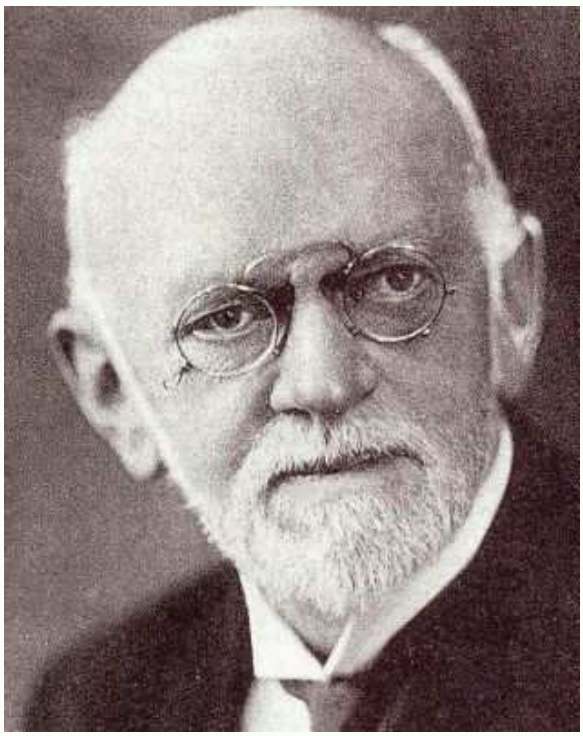
La consistencia de las geometrías no euclídeas es relativa, pues reposa sobre la de la geometría euclídea; lo que se probó es que si la geometría no euclídea fuera inconsistente, también lo sería la euclídea. Pero queda por probar realmente que la euclídea es consistente. Bien es verdad que llevamos 2000 años probando teoremas geométricos sin que jamás hayamos podido probar, a la vez, un teorema y su contrario. Es tranquilizador, aunque no definitivo; cualquier día puede aparecer un genio matemático desconocido y probar una contradicción de ese tipo.


Plano complejo con esferas de Riemann

El sueño de Fausto de todo matemático es probar que su ciencia está libre de

contradicciones, que resiste todos los asaltos. El sueño del matemático es probar que su ciencia es consistente. Y no sólo eso; su sueño incluye el que sea completa, es decir, que todo teorema que haya sido o pueda ser pensado sea susceptible de ser probado o refutado. Por desgracia, este ambicioso programa, -el programa de Hilbert- es sólo un sueño. Un sueño del que nos despertó cruelmente en 1931 Kurt Gödel.

El checoamericano Kurt Gödel, probablemente el lógico más famoso del siglo XX, y quizá de la historia, nos ha enseñado muchas cosas y ha resuelto muchos problemas muy complejos. Expongamos alguno de ellos. En 1900, David Hilbert (1862-1943) propuso 23 problemas en el Congreso Internacional de Matemáticas de París; todos ellos parecían entonces irresolubles y se suponía que encontrar su solución representaría avances considerables en las distintas ramas de las matemáticas. Desde entonces han sido estudiados a fondo, y buen número de ellos han sido ya resueltos. El problema que llevaba el número uno de la lista, llamado "hipótesis especial del continuo", ha sido uno de los atacados con éxito por Gödel.


David Hilbert

Sabíamos que el conjunto de los números naturales, N, posee menos elementos que el conjunto de los números reales, R, Hilbert lanzó la hipótesis de que no era posible hallar ningún conjunto -infinito, por supuesto- con más elementos que N, pero con menos que R. Lo de la "hipótesis del continuo" se debe a que el conjunto R acostumbra a designarse genéricamente como "el continuo". La hipótesis de Hilbert no es, a primera vista, ni evidente ni inevidente: simplemente es inatacable por cualquier parte.

Gödel, en 1938, demostró que si agregamos este enunciado a la teoría de conjuntos como un axioma más, no ocurre nada de particular. En concreto, probó que si los axiomas de la teoría de conjuntos más la hipótesis del continuo fueran inconsistentes, la teoría de conjuntos sola también lo sería. Por si fuera poco, probó que lo mismo sucedía con el hasta entonces misterioso axioma de elección. Ni la hipótesis del continuo ni el axioma de elección puede demostrarse que sean falsos. En 1963, Paul Cohen dio el definitivo carpetazo a la cuestión probando que si se suponía que fuesen falsos, tampoco se llegaba a ninguna contradicción. Por lo tanto, ni puede probarse que sean válidos ni que sean falsos. Se trata, de dos nuevos axiomas independientes del resto. Uno puede hacer con ellos lo que quiera, razonar con ellos o sin ellos -o incluso contra ellos-. Nunca incurrirá en contradicción, aunque, eso sí, edificará matemáticas distintas.

A. Einstein entregándole el I Premio "Einstein" a K. Gödel (al fondo pintura de I. Newton)

Con todo y ser mucho, esto es sólo una parte, la menos conocida, de lo llevado a cabo por Gödel. El resultado más célebre de Gödel es el que demuestra la imposibilidad del sueño de Fausto. Gödel probó que si se toma un conjunto de axiomas lo suficientemente amplio -que contenga los axiomas de la aritmética como mínimo- no es posible probar, con las armas de deducción del sistema, que tal conjunto sea a la vez consistente y completo. Es decir, que en el caso de ser completo contendría contradicciones. Y en el caso de no contener contradicciones -es decir, caso de ser consistente- habría siempre teoremas verdaderos que nunca podríamos demostrar.

Curiosa situación, que nos condena a aceptar que siempre habrá teoremas cuya certeza podremos comprobar para todos los casos particulares posibles, pero que nunca podremos demostrarlos.
Existe, claro está, una manera que podríamos calificar de fraudulenta de probar uno de estos teoremas-fantasmas: puesto que es un teorema verdadero ¡puede tomársele por axioma! Ampliamos el sistema de axiomas con uno más -precisamente el teorema-, y ya está. Ya hemos demostrado el teorema, puesto que es un axioma y los axiomas son obviamente deducibles de sí mismos. Pero el procedimiento

falla, como era de temer, pues volvemos a estar como al principio: habrá otro teorema verdadero e indecidible en el nuevo sistema axiomático.

Gödel, pues, ha mostrado en cierto modo las limitaciones de la matemática. Esta no puede probarlo todo; en particular, no puede probar su propia consistencia.

Gödel, ¿icono de las matemáticas?

Tras tan importantes descubrimientos que han hecho de Gödel una figura casi mítica para los matemáticos, podría pensarse que su nombre fuera ampliamente conocido. Pero la matemática no es una ciencia popular; como anécdota se cuenta que, cierto profesor universitario estadounidense afirmó en el curso de una conferencia, a la que asistía el mismísimo Gödel, que nada nuevo se había visto en lógica desde los tiempos de Aristóteles…

El pasado año, 2005, fue el "Año Mundial de la Física" en honor a aquel 1905 "annus mirábilis" de Albert Einstein. Este 2006 debería ser el "Año Mundial de las Matemáticas" en honor al centenario de Gödel, pero, por un lado, la mencionada falta de popularidad y, por otro, las prisas del año 2000 (unos por acabar el milenio y otros por empezarlo), nos dejan una vez más a Gödel, ni siquiera, a la altura de icono.