

Deducciones de las formulas para calcular las áreas de figuras geométricas a través de proceso cognitivos

Julio Cesar Barreto Garcia
 Universidad Nacional Abierta. Centro Local Yaracuy. Área de Matemática.
 Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado". Departamento de Matemáticas.
julioabarretog@hotmail.com

Resumen

Nos proponemos deducir las formulas para calcular el área de diferentes figuras geométricas a partir del conocimiento que tenían los griegos acerca del área del rectángulo y algunas propiedades de esta figura muy particular. Además veremos el concepto de conjunto elemental y un axioma importante que cumplen los conjuntos elementales tal como es la aditividad, y que además nos va a permitir junto al concepto de figura congruente deducir las formulas para calcular el área de otras figuras geométricas. A parte de todo esto, los diferentes procesos cognitivos nos van a permitir "operar" con las figuras geométricas de forma tal que sea más fácil de deducir la formula para calcular el área a partir de unas ya conocidas, es decir, generando un conocimiento progresivo.

Palabras clave: Rectángulo, Área, Conjunto elemental, Figura congruente, Procesos cognitivos.

Introducción

El desarrollo de los procesos cognitivos en el campo de la *Didáctica de la Matemática* es capaz de ayudar a nuestros estudiantes de secundaria en las deducciones de las formulas para calcular el área de diferentes figuras geométricas, los cuales se deben realizar coordinando la caracterización propuesta por Duval (1998) y desarrollados por Torregrosa y Quesada (2007) en la última referencia, en donde el proceso cognitivo de *visualización* está íntimamente relacionada con la forma geométrica de la figura, es decir, su configuración y el *razonamiento* se basa en aplicar las afirmaciones matemáticas que les corresponda algebraicamente.

La coordinación de estos procesos cognitivos les permitirá *construir* las formulas usadas para calcular el área de diferentes figuras geométricas, las cuales junto al concepto de conjunto elemental y figuras congruentes facilitara la deducción de estas fórmulas.

Relevancia

En la *Historia de la Matemática*, se le atribuye a los griegos el conocimiento de dos hechos importante para la geometría, tales como: El área de un rectángulo de lados a y b es igual a ab y el área de un rectángulo es invariante por traslación. Estos hechos nos permitirá deducir las formulas para calcular el área de diferentes figuras geométricas.

Referentes teóricos

El campo de la *Didáctica de la Matemática* ha tomado un auge muy importante en los últimos años, debido al estudio que ella ha realizado en relación a los procesos cognitivos que deben desarrollar nuestros estudiantes al resolver los problemas de geometría en los cuales estén envueltos.

En este artículo usaremos el modelo propuesto por Duval, en el cual se restringe un poco el concepto de *visualización* al de *aprehensión*, en el cual "Concebimos las especies de las cosas sin hacer juicio de ellas o sin negar o afirmar", según el Diccionario de la Real Academia Española (2001).

En estas *aprehensiones*, nos desplazaremos de una que empieza cuando el estudiante realice por ejemplo una *aprehensión operativa de reconfiguración* en un romboide cualquiera y lo transforme en un rectángulo de área conocida por los griegos, y a través de esto deduzca la formula para calcular el área de este romboide.

Deducciones de las formulas para calcular las áreas de figuras geométricas poligonales

Las matemáticas son el estudio de las relaciones entre cantidades, magnitudes y propiedades, y de las operaciones lógicas utilizadas para deducir cantidades, magnitudes y propiedades desconocidas. Así vamos a dar las primeras definiciones:

Definición 1 (Magnitud): Es todo aquello que se pueda medir. Entre las magnitudes que vamos a usar están las denominadas "*magnitudes escalares*", las cuales quedan completamente identificadas dando su valor, que siempre es un número real acompañado de una unidad.

Definición 2 (Línea poligonal): Es la figura plana obtenida trazando segmentos no alineados, de modo que dos segmentos consecutivos tengan sólo un extremo común. Esto lo veremos en la **Figura 1** de abajo:

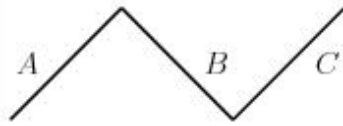


Figura 1: Línea poligonal.

Si cada vértice pertenece a dos lados, la poligonal se llama cerrada.

Definición 3 (Polígono): Es la región del plano limitada por una línea poligonal cerrada.

Definición 4 (Cuadrilátero): Es un polígono de cuatro lados.

Por consiguiente, posee también cuatro ángulos interiores, formado por cada dos lados consecutivos. Los vértices de un cuadrilátero son la intersección de cada dos lados y se llaman vértices opuestos a aquellos que no están situados sobre el mismo lado. La diagonal de un cuadrilátero son los segmentos determinados por cada dos vértices opuestos. Ahora, veamos las siguientes definiciones:

Definición 5 (Paralelogramo): Cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos.

Definición 6 (Rectángulo): Son los paralelogramos que tiene todos sus ángulos rectos.

Partiendo del cálculo de áreas se puede desarrollar a priori la idea de **Medida**, usando hechos primitivos conocidos por los griegos, tales como:

- (i). El área de un rectángulo de lados a y b es igual a ab .
- (ii). El área de un rectángulo es invariante por traslación.

Donde la **Figura 2** nos muestra lo sucedido:

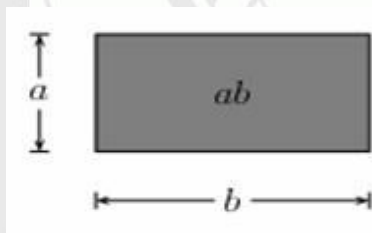


Figura 2: Rectángulo de longitudes en la base b y en la altura a .

Demos ahora la siguiente definición:

Definición 7 (Conjunto elemental): Un conjunto se llama elemental si se puede expresar como unión finita de triángulos y rectángulos. Cualquier polígono es un buen ejemplo de un conjunto elemental, esto lo veremos en la **Figura 3** de abajo:



Figura 3: Conjunto elemental.

Ahora bien, de acuerdo a estos dos hechos primitivos tenemos que un paralelogramo rectángulo de iguales lados como es el caso del cuadrado tiene área igual al producto de sus lados, es decir, lo que vino a ser el lado al cuadrado.

Veamos la **Figura 4** de abajo:

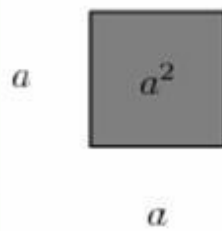


Figura 4: Cuadrado.

Axioma[1] 1: El área de un conjunto elemental es aditiva.

Esto quiere decir que: Si A y B son conjuntos elementales tal que A intersectado con B es vacío, un punto o un segmento, entonces el área de A unión B es igual a la suma del área de A mas el área de B .

Definición 8 (Romboide): Es el paralelogramo que no tiene ni sus ángulos ni sus lados iguales. Comúnmente al romboide se le denomina simplemente paralelogramo o también paralelogramo no rectangular.

Como todo paralelogramo no rectangular (romboide) como en la **Figura 5** de abajo y a la izquierda, puede ser transformado en un rectángulo de igual área, aplicando una *aprehensión operativa de reconfiguración*, esto lo hacemos moviendo el triángulo AEC a la derecha del paralelogramo no rectangular para formar el triángulo BFD , aunque el triángulo como figura geométrica no la hemos definido la vamos a usar en esta configuración, porque los dos triángulos van a tener igual área como veremos más adelante (**Observación 2**). Ahora, veamos lo ocurrido en la **Figura 5** de abajo a la derecha:

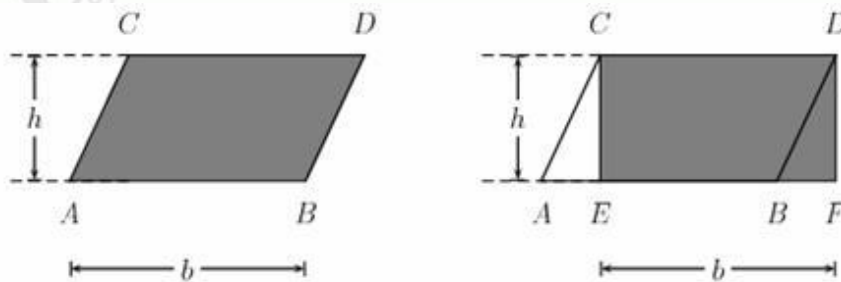


Figura 5: A la izquierda se muestra un paralelogramo no rectangular de longitudes en la base b y en la altura h . A la derecha se le aplica al paralelogramo no rectangular una *aprehensión operativa de reconfiguración*.

Y por la propiedad primitiva (ii) vemos que el paralelogramo no rectangular $ABCD$ ha sido transformado en el rectángulo $EBCF$ de igual área, de esta forma partiendo de un *razonamiento discursivo como un proceso natural* tenemos que el área del paralelogramo no rectangular viene dada por la formula:

$$A_p = b \times h.$$

Donde A_p denota el área del paralelogramo no rectangular, b es la longitud de la base y h es la longitud de la altura.

Observación 1: Aunque tienen la misma formula para calcular el área lo que cambia siempre es el nombre de las longitudes, es decir, lo que para el paralelogramo no rectangular puede ser base y altura, para el rectángulo era largo y ancho.

Demos ahora las definiciones siguientes:

Definición 9 (Figura congruente): Dos figuras son congruentes si se pueden hacer coincidir en todos sus puntos mediante una isometría (traslación, rotación, simetría).

Definición 10 (Triángulo): Es un polígono de tres lados.

Para calcular el área del triángulo ABC , colocamos mediante una *aprehensión operativa de cambio figural* el triángulo BCD congruente con el triángulo ABC como se muestra en la **Figura 6** de abajo y a la derecha, formando el romboide $ABCD$ con formula para el área deducida anteriormente, y de esta forma partiendo de una *conjetura sin demostración*, tenemos que el área del triángulo ABC es la mitad del área del romboide $ABCD$:

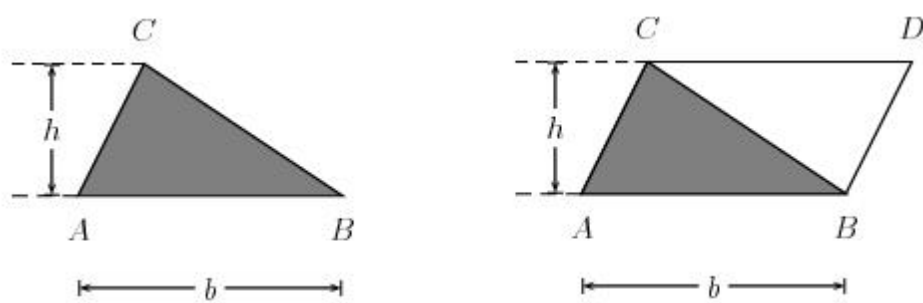


Figura 6: A la izquierda se muestra un triángulo de longitudes en la base b y en la altura h . A la derecha se le aplica al triángulo una *aprehensión operativa de cambio figural* para transformarlo en un romboide de fórmula para calcular su área deducida anteriormente.

Así,

$$A_T = \frac{b \times h}{2}.$$

Donde A_T denota el área del triángulo, b es la longitud de la base y h es la longitud de la altura.

Observación 2: Esto es lo que aplicamos en los triángulos de la deducción de la fórmula para calcular el área del romboide. La *congruencia* de los mismos implica igual área.

Ejercicio 1: Demuestre la fórmula para calcular el área de un triángulo colocándolo dentro de un rectángulo de longitud en la base igual a b .

Ejercicio 2: Si colocamos los triángulos descansando sobre diferentes lados del mismo llamados base, como los mostrados en la **Figura 7** de abajo:

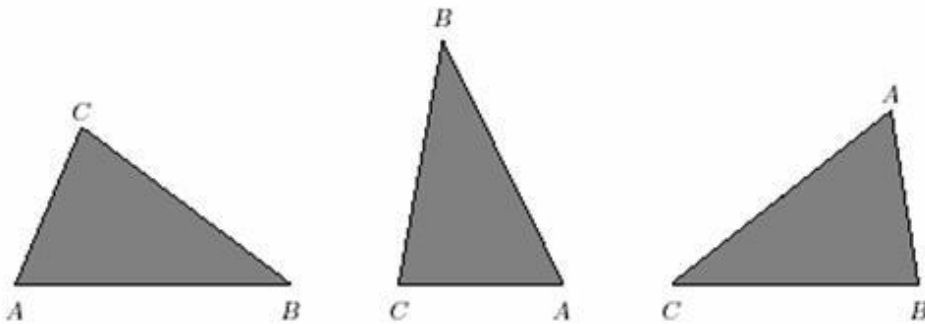


Figura 7: Triángulos que nos pueden dar evidencias de la invarianza por traslación de los mismos.

Veremos que los triángulos cumplen la invarianza por traslación heredada de la invarianza de los rectángulos de acuerdo al **Ejercicio 1** (el área del triángulo es la mitad del área del rectángulo que se forme con dicho triángulo).

Definición 11 (Trapecio): Cuadrilátero que solo tienen dos lados paralelos.

Dado el trapecio de abajo, apliquémosle la siguiente *aprehensión operativa de cambio figural* mostrada en la **Figura 8** de abajo:

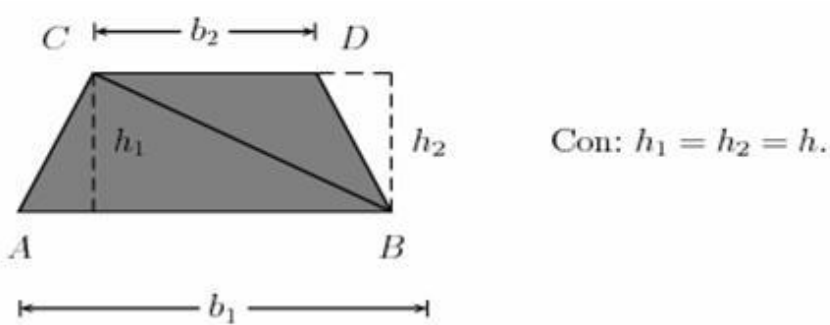


Figura 8: Trapecio con longitudes en la base menor de b_2 , en la base mayor de b_1 , y de altura $h_1 = h_2 = h$ al cual se le aplico una *aprehensión operativa de cambio figural*.

Luego, mediante un *razonamiento discursivo como un proceso natural* tenemos que:

$$A_T ABC = \frac{b_1 \times h_1}{2} \quad (I)$$

$$A_T DCB = \frac{b_2 \times h_2}{2} \quad (II)$$

Donde $A_T ABC$ denota el área del triángulo ABC , $A_T DCB$ denota el área del triángulo DCB , b_1 es la longitud de la base mayor, b_2 es la longitud de la base menor y $h_2 = h_1 = h$ es la longitud de la altura.

Así, como el área de este conjunto elemental es aditiva (**Axioma 1**), tenemos:

$$A_{TP} = \frac{b_1 \times h_1}{2} + \frac{b_2 \times h_2}{2}, \text{ de (I) y (II).}$$

$$= \frac{(b_1 + b_2) \times h}{2}, \text{ sumando fracciones y asociando, pues } h_1 = h_2 = h.$$

Donde A_{TP} denota el área del trapecio.

Ejercicio 3: Demuestre la formula para calcular el área de un trapecio dividiéndolo en tres conjuntos elementales, esto es, divídalos en dos triángulos de altura h y un rectángulo con ancho (altura) h y largo (base) b_2 .

Definición 12 (Rombo): Es el paralelogramo que tiene todos sus lados iguales, pero sus ángulos no son rectos.

Ahora, dado el siguiente rombo, en la **Figura 9** de abajo a la izquierda:

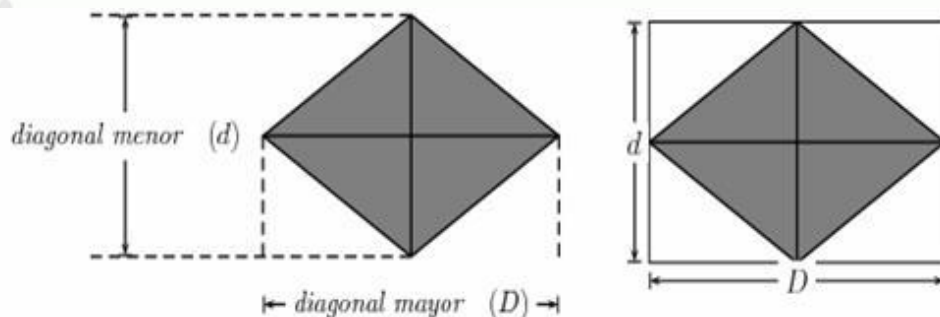


Figura 9: A la izquierda un rombo con longitudes en la diagonal menor d y en la diagonal mayor de D . A la derecha se muestra el rombo dentro de un rectángulo realizado con las longitudes dadas.

Al colocarla dentro de un rectángulo como tenemos en la **Figura 9** de arriba a la derecha, tenemos que 8 triángulos son iguales y 4 son del rombo.

Ahora bien, D es la longitud de la base y d es la longitud de la altura. Como en el rectángulo tenemos que:

$$A_R = b \times h.$$

Donde A_R denota el área del rectángulo de ancho (altura) h y largo (base) b . Y este rombo tiene la mitad del área del rectángulo, así nos queda:

$$A_{RB} = \frac{b \times h}{2}.$$

Donde A_{RB} denota el área del rombo. Luego, expresada en términos de las diagonales:

$$A_{RB} = \frac{D \times d}{2}.$$

En general, el área de un polígono regular como el de la **Figura 10** siguiente:

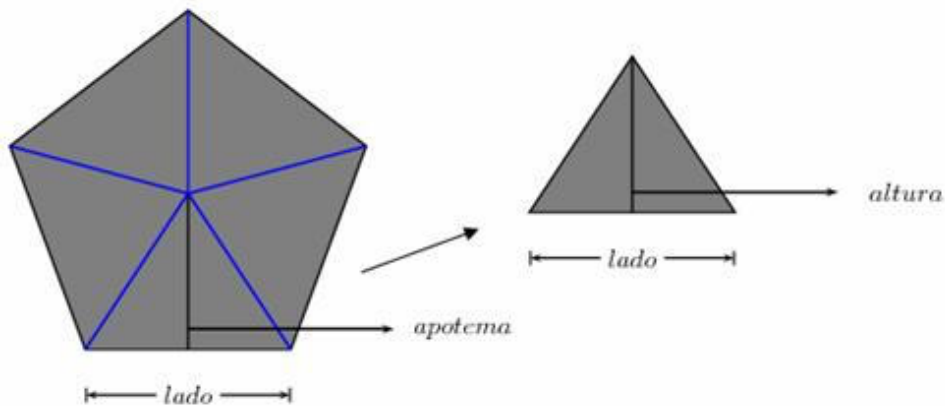


Figura 10: A la izquierda mostramos el polígono regular llamado pentágono regular dividido en 5 triángulos equiláteros. Y a la derecha un triángulo equilátero con sus respectivas longitudes (lado=base y apotema= altura).

Viene dada por:

$$A_P = \frac{\text{perímetro} \times \text{apotema}}{2} \quad (III).$$

Con, $\text{perímetro} =$ suma de las longitudes de los lados del polígono regular y A_P denota el área del polígono regular.

Por ejemplo, este polígono regular de la **Figura 10** de arriba y a la izquierda llamado pentágono regular lo podemos dividir en diferentes tipos de figuras geométricas como por ejemplo en 5 triángulos equiláteros (tomando la apotema como la altura de estos triángulos) como veremos en la **Figura 10** de arriba y a la derecha. Y luego, a través de la aditividad de cada una de ellas, al ser un conjunto elemental podemos llegar al resultado, denotando por A_{PR} al área del pentágono regular:

$$A_{PR} = \frac{\text{perímetro del pentágono} \times \text{apotema}}{2}, \text{ con } \text{perímetro del pentágono} = 5 \times \text{lado}$$

Este procedimiento lo podemos realizar inductivamente desde un pentágono regular, un hexágono regular (donde podemos dividirlos en 6 triángulos o dos trapezios isósceles), un heptágono regular y así sucesivamente podemos deducir la formula para calcular el área de un polígono regular cualquiera mediante la formula (III) dada arriba.

Interpretaciones y Conclusiones

En las deducciones de estas formulas para calcular el área de diferentes figuras geométricas, nuestros estudiantes aprenderán repasando conceptos tan primitivos como el área de un rectángulo y sus propiedades, así como los conceptos de conjunto elemental y de figuras congruentes, los cuales viéndolos desde una dimensión, es decir, al calcular longitudes y encontrar por lo menos dos iguales, surge este concepto geométrico llamado congruencia para significar el hecho de esta igualdad geométrica. Con estas herramientas dadas en forma geométrica y los procesos cognitivos llamados *aprehensión operativa de reconfiguración* (Es cuando las subconfiguraciones iniciales se manipulan como piezas de un puzzle) y la *aprehensión operativa de cambio figural* (Es cuando se añaden (quitan) a la configuración inicial nuevos elementos geométricos, creando nuevas subconfiguraciones), las cuales nos originan un *razonamiento discursivo como un proceso*

natural (El cual es espontáneamente realizado en el acto de la comunicación ordinaria a través de la descripción, explicación y argumentación) o una *conjetura sin demostración* (La cual permite resolver el problema aceptando las conjeturas simples, a través de una *aprehensión operativa de cambio figural* y que conduce a la solución de un problema) obtenemos las formulas para calcular el área correspondientes a las diferentes figuras geométricas.

Referencias

- Bárcenas, D. (2006): "La integral de Lebesgue un poco más de cien años después" Boletín de la Asociación Matemática Venezolana 13, (1), 68-69.
- Acosta, A.; Azócar, A.; González, J.; Ortiz, J. (1995): Matemática I. Estudios Generales. Tomo II. Sexta Edición. UNA Caracas.
- Boyer, C. (2003): Historia de la Matemática. Editorial Alianza: Madrid.
- Cantoral y Farfan. (2004): Desarrollo conceptual del cálculo. Thomson Editores: México.
- Duran, D. (2004): Geometría Euclidiana. V Talleres de Formación Matemática. Asociación Matemática Venezolana. Maracaibo, 26 al 31 de Julio.
- Enciclopedia del Estudiante Larousse. (1999): Matemática e Informática. Edición especial en lengua española de la Encyclopédie des Jerines, Larousse S.A.
- Jiménez, D. (2004): " π la letra griega que los griegos no usaron" Boletín de la Asociación Matemática Venezolana 9 (1) 103-117.
- Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007): Coordinación de los Procesos Cognitivos en Geometría. *Relime*, 10 (2), 273-300. México: Publicación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.