Graduación de la dificultad en juegos secuenciales de saltar y comer: Un ejemplo con *El Solitario inglés (3ª parte)*

J.A. Rupérez Padrón y M.García Déniz
-Club Matemático-

No teníamos intención de insistir con el Solitario pero nos han hecho algunas consultas sobre varios aspectos del mismo y las respuestas que hemos elaborado nos han incitado a volver una vez más sobre este juego… ¡y ya van cuatro!

Pueden encontrar los anteriores en esta misma revista. El primero, "**El Solitario. Un juego con mucho juego**", está en la sección **Almacén de Recursos** (barra de herramientas de la parte superior) pues era un artículo publicado en la edición en papel de la Revista; el segundo, "**Graduación de la dificultad en juegos secuenciales de saltar y comer: un ejemplo con El Solitario Inglés (1ª parte)",** está en la sección **Matemática Recreativa** del nº 67 de esta Revista (**Últimos números** de la barra de herramientas); lo mismo pasa con el tercero, "**Graduación de la dificultad en juegos secuenciales de saltar y comer: un ejemplo con El Solitario Inglés (2ª parte)", que** está en la sección **Matemática Recreativa** del nº 68 de esta Revista (**Últimos números** de la barra de herramientas).

Y empezamos con las consultas.

La primera nos viene de un lector de nombre ***Antonio Presmanes*** que nos escribe:

***"Creo entender que el solitario francés no tiene solución si queda vacía la casilla del centro. ¿Es cierto esto?
Un saludo,
A. Presmanes"***

Y esta es la respuesta:

Efectivamente, así ocurre. Ya lo apuntábamos en nuestros artículos sobre el solitario (Revista NÚMEROS de la Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas, www.sinewton.org).
Se puede demostrar matemáticamente esta imposibilidad. Para ver un buen documento, aunque antiguo, sobre este asunto leer "**Recreaciones matemáticas 1**", de **Edouard Lucas**, editado por Nivola en el nº 17 de su colección Ciencia Abierta (Madrid, 2007).
También se puede ver otro estudio de imposibilidad, más moderno, sobre el solitario inglés en "**Winning Ways for your Mathematical Plays**", de **Berlekamp**, **Conway** y **Guy**, editado por A. K. Peters, Natick, Massachusetts, 2003.

Agradecemos su e-mail por lo que supone respecto a la lectura de nuestros artículos y el interés de su contenido. No sabemos desde dónde nos escribe y nos gustaría conocerlo. Esperamos haber satisfecho su pregunta con nuestra respuesta y nos ponemos a su disposición para cualquier otra consulta.

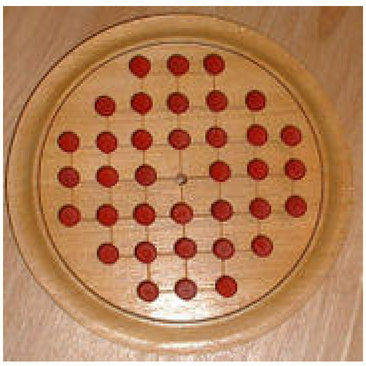
Un saludo afectuoso de José Antonio Rupérez Padrón y Manuel García Déniz (Club Matemático).

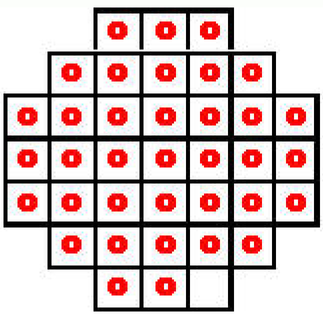
Y añadimos para todos nuestros lectores:

Veamos un ejemplo de solución para el problema principal en el tablero del Solitario Francés.

Solitario francés:

Tiene cuatro casillas más que el solitario inglés, situadas en los ángulos cóncavos de la cruz. Tiene, por tanto, 37 casillas y se resuelve con 36 bolas.
No tiene solución con el agujero central vacío.





Inicio: Tablero totalmente lleno, excepto un agujero vacío en 51.
Objetivo: Al final del juego debe quedar una sola pieza en el agujero vacío diametralmente opuesto al del comienzo, en 37. Este tipo de problema se dice también del tipo **corsario**.

La solución que presentamos es de **G. Brandreth** y está recogida por él mismo en uno de sus libros. Consta de 27 movimientos y utilizaremos la notación de las jugadas ya explicadas en los artículos anteriores para el solitario inglés, a saber, cada casilla viene determinada por las cifras que indican, en este orden, la columna y la fila donde se halla. Cada salto está indicado por dos posiciones separadas por una flecha. Si el salto es múltiple aparecerán varias posiciones consecutivas separadas por las correspondientes flechas:

(1º) 31 → 51
(2º) 43 → 41
(3º) 33 → 31
(4º) 13 → 33
(5º) 62 → 42
(6º) 54 → 52
(7º) 51 → 53
(8º) 56 → 54 → 52
(9º) 34 → 32
(10º) 31 → 33
(11º) 36 → 34 → 32
(12º) 73 → 53
(13º) 74 → 54
(14º) 75 → 55
(15º) 14 → 34
(16º) 15 → 35
(17º) 54 → 56 → 36
(18º) 26 → 46
(19º) 34 → 36
(20º) 37 → 35
(21º) 52 → 54 → 34 → 36 → 56
(22º) 41 → 43
(23º) 22 → 42 → 44 → 46
(24º) 47 → 45
(25º) 66 → 46
(26º) 45 → 47
(27º) 57 → 37

Cambiando los tres últimos movimientos se pueden obtener las soluciones de 51 a 64, en 26 movimientos. (24º) 57 → 55, (25º) 47 → 45 → 65, (26º) 66 → 64.
Los mismos movimientos, aplicando tres giros de 90º, dan también las soluciones de. 13ª 75, 37 a 51 y 75 a 13.
Con simetría horizontal y vertical se obtienen también las soluciones de: 31 a 57, 15 a 73, 57 a 31 y 73 a 15.

La segunda consulta la remite **M. Pérez Maza** y dice:

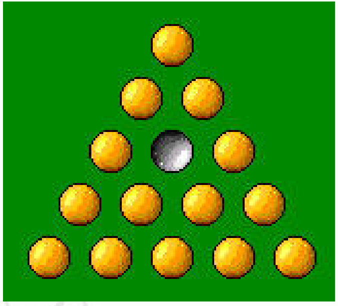
“Me gustaría saber si existe una posible solución al juego del solitario triangular de 15 agujeros. Si es así me gustaría conocerla.
Gracias.
M. Pérez Maza”

Y ésta es nuestra respuesta

El solitario triangular se compone de casillas situadas de manera que configuren un triángulo. Para ello basta con disponer las casillas en filas tales que cada una tenga una casilla más que la anterior. El más simple, con solución posible, tiene cuatro filas con 1, 2, 3 y 4 casillas. El siguiente tendrá una fila más con cinco casillas, como el de la figura.

Problemas:

1) **Centro vacío.** Está vacío el agujero nº 5 (centro del tablero) y la última bola debe quedar sobre el agujero nº 13 (centro del lado más alejado). Así se ve en la ilustración.



2) **Vértice vacío.** Está vacío el agujero nº 1 (vértice del triángulo) y la última bola debe quedar sobre dicho agujero nº 1. También valdría para las bolas 11 o 15.

3) **Centro del lado vacío.** Está vacío el agujero nº 4 o 6 (centro de un lado) y la última bola debe quedar sobre el mismo agujero nº 4 o 6. También valdría para la bola 13.

Simbolización:
Numeraremos los agujeros de 1 a 15, comenzando por la parte superior. Así la primera fila sólo tiene al 1, la segunda fila el 2 y el 3, la tercera el 4, el 5 y el 6, la cuarta el 7, el 8, el 9 y el 10, y, finalmente, la quinta y última fila contiene el 11, el 12, el 13, el 14 y el 15.
Simbolizaremos cada **salto** con el número del agujero de donde parte la bola, una flecha y el número del agujero, previamente vacío, donde se deposita.
Si hay varios saltos consecutivos con la misma bola, los escribiremos formando una cadena de saltos y entenderemos que todos ellos constituyen un único **movimiento**.

Aunque las soluciones las hemos trabajado y obtenido en nuestro taller, es de justicia reconocer a quiénes las han publicado anteriormente. Por ese motivo, en cada solución (todas ellas comprobadas y, en algunos casos limpias de errores de impresión) añadimos el nombre de los autores que las han dado en alguna de sus publicaciones. Para saber exactamente en qué libros, les remitimos a la bibliografía que figura en nuestros artículos publicados en la revista **NÚMEROS** de la **Sociedad Canaria "Isaac Newton" de Profesores de Matemáticas**.

Soluciones:
1) **Centro vacío.**
Solitario triangular. Modelo de 15 casillas. De 5 a 13. Reducir 14 bolas a 1.

Solución de I. Chacón. 12 movimientos.

12 → 5
14 → 12
10 → 8
3 → 10
15 → 6
2 → 9
7 → 2
1 → 4 → 13
12 → 14
6 → 13
14 → 12
11 → 13

2) **Vértice vacío.**
Solitario triangular. Modelo de 15 casillas. De 1 a 1. Reducir 14 bolas a 1.

a.- Solución de Beasley. 10 movimientos:

4 → 1
6 → 4
7 → 2
12 → 5
14 → 12
15 → 6
3 → 10
11 → 13 → 6

10 → 3
1 → 6 → 4 → 1

b.- Solución de L. Ferrero. 11 movimientos:

6 → 1
4 → 6
1 → 4
12 → 5
10 → 3
14 → 12
11 → 13 → 6
3 → 10
15 → 6
7 → 2
6 → 4 → 1

3) **Centro del lado vacío.**
Solitario triangular. Modelo de 15 casillas. De 6 a 6. Reducir 14 bolas a 1.

a.- Solución de C. Barry Townsend. 12 movimientos:

4 → 6
11 → 4
12 → 5
2 → 7
6 → 4
7 → 2
1 → 4
10 → 8
14 → 12 → 5
4 → 6
3 → 10
15 → 6

Solitario triangular. Modelo de 15 casillas. De 4 a 4. Reducir 14 bolas a 1.

b.- Solución de L. Ferrero. 9 movimientos:

11 → 4
2 → 7
13 → 4
7 → 2
15 → 13
12 → 14
10 → 8
3 → 10
1 → 4 → 13 → 15 → 6 → 4

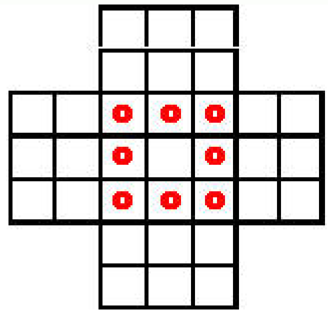
¡Una gran escoba (o barrido) final de 5 saltos!

Obsérvese que cualquiera de las soluciones dadas puede trasladarse con un giro de 60º o de 120º y obtener así soluciones para cada uno de los distintos vértices o centros de lados del triángulo o para acabar en un punto diferente del indicado en el problema.

Para completar este artículo hemos decidido comentar con alguna profundidad otro tipo de solitario: el de tablero cuadrado, así como otros dos tipos de problemas con el solitario inglés: el de tipo C y el de ahogamiento, y también el problema de **Berlekamp**, **Conway** y **Guy** acerca de **¿Cómo enviar un explorador fuera?**

Solitario Inglés. Problema Tipo C
Inicio: El tablero completamente ocupado salvo la casilla central.
Objetivo: Eliminar algunas fichas (no todas) hasta dejar sólo unas cuantas piezas formando una figura predeterminada.

Problema El cuadrado de 8 bolas.

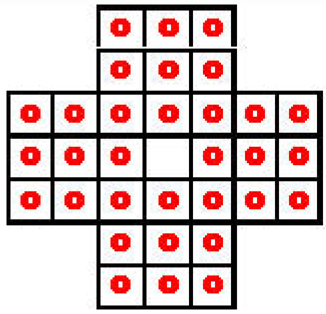


Descripción: 32 bolas situadas en el tablero, con el agujero central vacío.

Objetivo: Eliminar las fichas necesarias mediante las reglas de juego del solitario y dejar solamente las que aparecen en el gráfico.

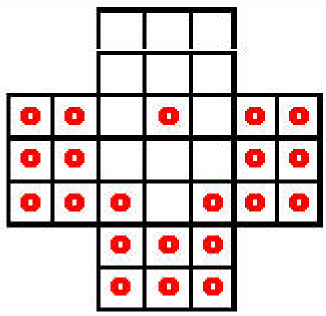
Indicaciones: Se puede hacer en 23 movimientos.

Para resolverlo, arrancamos, pues, del solitario habitual con 32 fichas colocadas como se ve en la figura siguiente:



(1º) 46 → 44
(2º) 25 → 45
(3º) 37 → 35
(4º) 34 → 36
(5º) 57 → 37 → 35
(6º) 45 → 25
(7º) 43 → 45
(8º) 64 → 44
(9º) 56 → 54
(10º) 44 → 64

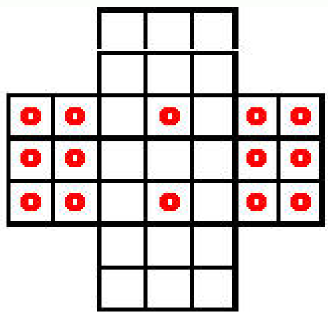
En este momento, después del 10º movimiento, encontramos el tablero con la siguiente disposición de las fichas:



A partir de aquí realizaremos los siguientes movimientos:

(11º) 23 → 43
(12º) 31 → 33
(13º) 43 → 23
(14º) 63 → 43
(15º) 51 → 53
(16º) 43 → 63
(17º) 41 → 43

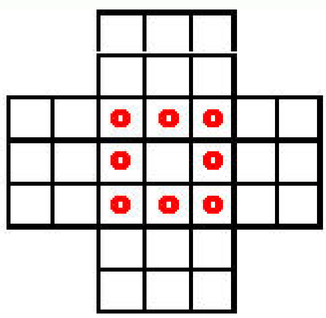
Ahora el tablero, después del 17º movimiento, estará con la siguiente disposición:



Y, a partir de este momento, los seis últimos movimientos se pueden realizar de dos en dos, de forma simétrica, cogiendo una ficha con la mano izquierda y otra con la derecha simultáneamente.

(18º) Izquierda: 15 → 35; (19º) Derecha: 75 → 55
(20º) Izquierda: 14 → 34; (21º) Derecha: 74 → 54
(22º) Izquierda: 13 → 33; (23º) Derecha: 73 → 53

Quedando finalmente así el tablero, con el objetivo conseguido:

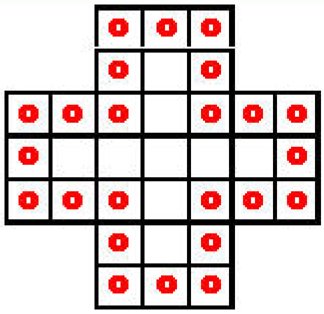


Obsérvese que no hay bloqueo ni ahogamiento.
Si se quiere se puede seguir saltando y comiendo. Pero el objetivo era formar una figura determinada.

Si con las cuatro fichas que ocupan el centro de cada lado del cuadrado se salta en las cuatro direcciones del tablero (N, S, E y O) se eliminan cuatro fichas más y las cuatro que quedan ocupan los vértices de un cuadrado inclinado en las posiciones 23, 36, 52 y 65. Pero ése sería otro problema y otro objetivo.

Hay un catálogo bastante amplio de problemas de este tipo y se pueden encontrar en bastantes libros de los recomendados o en las páginas web indicadas en los artículos anteriores.
Presentaremos algunos más:

Problema El muro de 24 bolas.

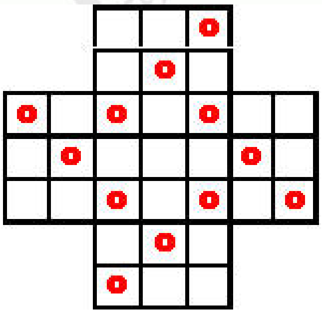


Descripción: 32 bolas situadas en el tablero, con el agujero central vacío.

Objetivo: Eliminar las fichas necesarias mediante las reglas de juego del solitario y dejar solamente las que aparecen en el gráfico.

Indicaciones: Se puede hacer en 6 movimientos.

Problema El molinillo de 12 bolas.

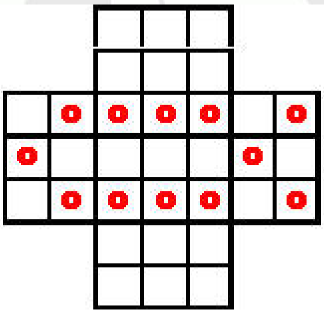


Descripción: 32 bolas situadas en el tablero, con el agujero central vacío.

Objetivo: Eliminar las fichas necesarias mediante las reglas de juego del solitario y dejar solamente las que aparecen en el gráfico.

Indicaciones: Se puede hacer en 20 movimientos.

Problema El pez de 12 bolas.



Descripción: 32 bolas situadas en el tablero, con el agujero central vacío.

Objetivo: Eliminar las fichas necesarias mediante las reglas de juego del solitario y dejar solamente las que aparecen en el gráfico.

Indicaciones: Se puede hacer en 20 movimientos.

Esperamos que les gusten estos nuevos problemas y pasen buenos ratos tratando de resolverlos en su tablero de solitario inglés.

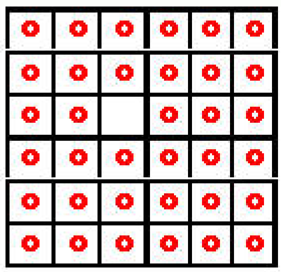
Solitario cuadrado:

Podríamos empezar preguntándonos: **Con las reglas del solitario inglés, ¿cuál es el tablero de solitario cuadrado más pequeño en el que sea posible empezar con el tablero completo, excepto una vacante en cualquier sitio, y sea posible eliminar todas las fichas salvo una, que puede quedar en cualquier posición?**

Y podemos empezar a responder:

El cuadrado de 2x2 solo admite dejar un sitio vacío en una esquina. Está ahogado y, por tanto, no tiene solución.

El cuadrado de 3x3 admite dejar el sitio vacío en el centro del tablero, en el centro de un lado o en una esquina. En el primer caso queda el juego bloqueado y no admite solución. En el segundo caso sólo admite una jugada y se bloquea. En el tercer caso también se bloquea después de cuatro jugadas.



Por tanto el tablero cuadrado puede tener cualquier tamaño, a partir de 3x3.

La casilla vacía puede estar en cualquier sitio del tablero.

En éste que presentamos, de 6x6 se sitúa la casilla vacía en una de las cuatro centrales del tablero.

La bola final debe quedar en la esquina inferior derecha. Es decir, casilla vacía en 34 y bola final en 61.

Utilizaremos para las jugadas la misma notación que para el solitario inglés. La solución que presentamos es de **Davis**, está recogida por **Beasley** y consta de 15 movimientos:

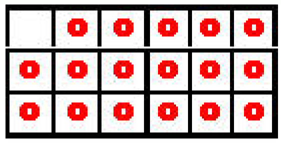
(1º) 36 → 34
(2º) 16 → 36
(3º) 46 → 26

(4º) 66 → 46
(5º) 14 → 16 → 36 → 56
(6º) 12 → 14
(7º) 33 → 13 → 15 → 35 → 33
(8º) 55 → 35
(9º) 43 → 45
(10º) 64 → 66 → 46 → 44
(11º) 41 → 43 → 45 → 25 → 23 → 43
(12º) 62 → 64 → 44 → 42 → 62
(13º) 31 → 33
(14º) 11 → 31
(15º) 61 → 63 → 43 → 23 → 21 → 41 → 61

Las jugadas múltiples, excepto la primera, todas constituyen un movimiento circular muy c curioso.

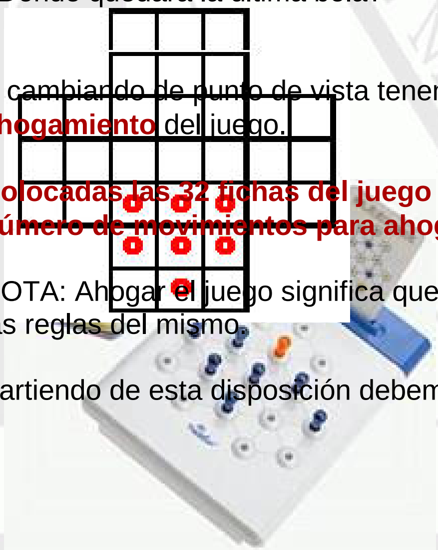
Pruebe a resolver ahora el mismo tablero con otras posiciones del agujero vacío o con otros tamaños de tablero. O también pruebe con otras formas, por ejemplo con el solitario rectangular.

Solitario rectangular:



En principio puede tener cualquier tamaño y la casilla vacía estar en cualquier punto del tablero. En el caso presentado:

¿Tendrá solución?
¿Dónde quedará la última bola?

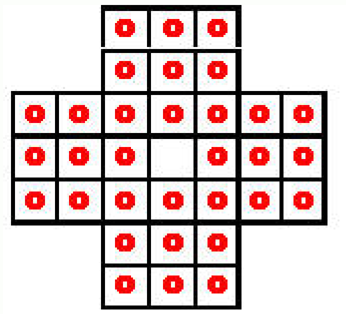


Y cambiando de punto de vista tenemos algunos problemas curiosos. Con el solitario inglés presentamos el de **ahogamiento** del juego.

Colocadas las 32 fichas del juego (queda vacío el agujero central) se pide <u>ahogar el juego</u>: ¿Cuál es el mínimo número de movimientos para ahogar un tablero inglés?

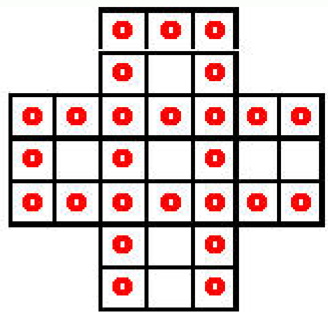
NOTA: Ahogar el juego significa que resulta imposible mover cualquier ficha de las situadas en el tablero, de acuerdo con las reglas del mismo.

Partiendo de esta disposición debemos llegar a la posición de ahogamiento.

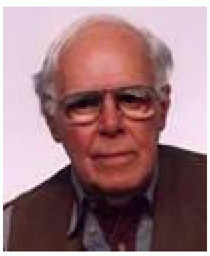


En sólo seis movimientos es posible llegar a una situación en la que ninguna de las fichas restantes es capaz de realizar un movimiento legal.

La solución viene dada por los siguientes movimientos:

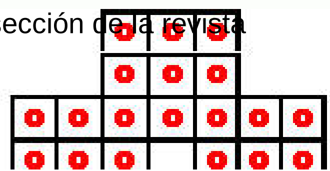


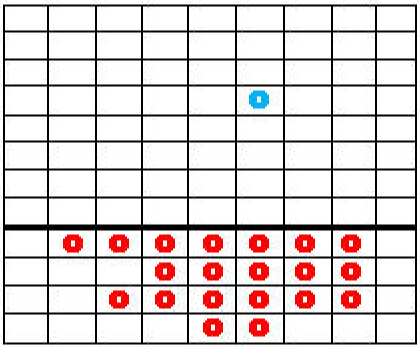
1º. 46 → 44.
2º. 43 → 45.
3º. 41 → 43.
4º. 24 → 44.
5º. 54 → 34.
6º. 74 → 54.



Ninguna bola puede saltar sobre otra. El juego está, pues, “bloqueado” o “ahogado”.

Este problema de ahogamiento fue planteado por **Martin Gardner** en su sección de la revista **“Scientific American”.**





Otro problema más difícil, pero muy interesante es el que presentamos a continuación, con las reglas del solitario (saltar y comer) sobre un tablero cuadriculado.

Berlekamp, **Conway** y **Guy** han propuesto un solitario para jugar en el plano indefinido, bajo la pregunta **¿Cómo enviar un explorador fuera?**

¿Qué movimientos hay que realizar con las fichas rojas para conseguir que una de ellas llegue a alcanzar la posición marcada por la ficha de color azul?
¿Se atreven a explorar este problema?

También es interesante decir que hay muchas comercializaciones de los distintos solitarios y que continuamente aparecen versiones y variantes. Una de las últimas que hemos encontrado en el mercado es la denominada **SUBTRAX** de la firma THINKFUN (**www.ThinkFun.com**), que describimos a continuación:
Un tablero en forma de caja en cuya tapa aparece dibujado el tablero y en su interior una colección de 40 tarjetas con los problemas propuestos más 14 peones azules y 1 naranja.

El tablero es del tipo hexagonal, formado con tres hexágonos unidos entre sí. Contiene, pues, 16 agujeros que ocupan las intersecciones de lados y diagonales de la figura.
Las tarjetas presentan la forma de cartas de una baraja. La parte delantera hace la propuesta del problema indicando cuántos peones azules deben colocarse en el tablero y dónde, más la posición del peón naranja que siempre debe aparecer. En su parte posterior aparece la solución, indicando el número de movimientos necesarios.
Hay cuatro niveles de dificultad: principiante, intermedio, avanzado y experto.
Las instrucciones que vienen con el juego son:
Objetivo: Saltar y quitar del tablero todas las fichas azules, hasta que sólo quede la ficha naranja.
Preparación: Elige una de las 40 tarjetas de desafío y coloca las fichas en el tablero como te indica el dibujo de la tarjeta.
Reglas:
1. Las fichas pueden saltar de agujero a agujero sólo en la dirección que indican las líneas inscritas en el tablero.
2. Sólo se puede mover una pieza saltando por encima de otra pieza que se encuentre en un agujero adyacente y esté libre el siguiente agujero cumpliendo la regla 1.
3. Cuando saltas sobre una ficha, la debes sacar del tablero.
4. No están permitidos los movimientos que no impliquen saltar otra ficha. No se puede saltar sobre espacios vacíos. No se puede saltar dos fichas a la vez. Siempre que saltas debes coincidir en un espacio vacío.
5. Resolver el desafío significa que solo queda en el tablero la ficha naranja.

El juego está distribuido en España y Portugal por GIRO Marketing & Sales, S.L.L. (www.girosales.com) y se vende en muchas tiendas de juego.

Y ahora, de propina, otra solución del solitario inglés, sin utilizar empaquetamientos.

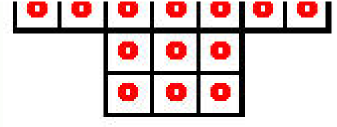
Se trata de partir del solitario inglés al que le falta la ficha central y saltar y comer todas las fichas menos una que deberá estar al final en el agujero central del tablero.

La solución que presentamos se llama **GALIMATAZO**[i], título dado en español al celebre poema incluido por Lewis Carrol en su “Alicia a través del espejo”: *Jabberwocky*, y fue recogida por **Martin Gardner** de uno de sus famosos artículos, aunque es original de **Lynn Rohrbough**, y tiene la particularidad de ser una solución simétrica “a dos manos” que consta de 29 movimientos.

Los 9 primeros movimientos no son simétricos, aunque se pueden realizar a dos manos (excepto el 9º) que es impar.

Cuando se terminan, el tablero queda configurado como se ve aquí abajo:

(1º) 46 → 44
(2º) 65 → 45
(3º) 57 → 55
(4º) 45 → 65



(5º) 25 → 45
(6º) 44 → 46
(7º) 47 → 45
(8º) 37 → 35
(9º) 45 → 25

Y ahora empiezan los sorprendentes movimientos simétricos “a dos manos”:

Mano izquierda Mano derecha

(10º) 15 → 35 (11º) 75 → 55
(12º) 34 → 36 (13º) 54 → 56
(14º) 14 → 34 (15º) 74 → 54
(16º) 33 → 35 (17º) 53 → 55
(18º) 36 → 34 (19º) 56 → 54
(20º) 31 → 33 (21º) 51 → 53
(22º) 34 → 32 (23º) 54 → 52
(24º) 13 → 33 (25º) 73 → 53

Para quedar el tablero con la siguiente disposición:

Y terminar con estos movimientos simples:

(26º) 43 → 63
(27º) 33 → 31 → 51 → 53
(28º) 63 → 43
(29º) 42 → 44

Con lo que acaba el problema con éxito.

Y, queridos lectores y amigos, con esta nueva incursión en el mundo de los solitarios esperamos poder dedicar los próximos artículos, que tenemos ya en preparación, a otros juegos o puzzles.

Disfruten con todo esto como nosotros hemos disfrutado al investigarlos y aplicarlos en el aula. Con todo el cariño del mundo.

Club Matemático.

El **Club Matemático** está formado por los profesores
José Antonio Rupérez Padrón, del **IES de Canarias-Cabrera Pinto** (La Laguna), y
Manuel García Déniz, del **IES Tomás de Iriarte** (Santa Cruz de Tenerife).
mgarden@g.obiernodecanarias.org / jruppad@gobiernodecanarias.org

---

[i] **Galimatazo**

(Taducción de Jaime de Ojeda)

Brillaba, brumeando negro, el sol;
agiliscosos giroscaban los limazones
banerrando por las váparas lejanas;
mimosos se fruncían los borogobios
mientras el momio rantas murgiblaba.

!Cuídate del Galimatazo, hijo mío!
!Guárdate de los dientes que trituran
y de las zarpas que desgarran!
!Cuídate del pájaro Jubo-Jubo y
que no te agarre el frumioso Zamarrajo!

Valiente empuñó el gladio vorpal;
a la hueste manzona acometió sin descanso;
luego, reposóse bajo el árbol del Tántamo

y quedóse sesudo contemplando…

Y así, mientras cavilaba firsuto.
!!Hete al Galimatazo, fuego en los ojos,
que surge hedoroso del bosque turgal
y se acerca raudo y borguejeando!!

!Zis, zas y zas! Una y otra vez
zarandeó tijereteando el gladio vorpal!
Bien muerto dejo el monstruo, y con su testa
!volvióse triunfante galompando!

!¿Y haslo muerto?! !¿Al Galimatazo?!
!Ven a mis brazos, mancebo sonrisor!
!Qué fragarante día! !Jujurujúu! !Jay, jay!
Carcajeó, anegado de alegría.

Pero brumeaba ya negro el sol;
agiliscosos giroscaban los limazones
banerrando por las váparas lejanas;
mimosos se fruncían los borogobios
mientras el momio rantas necrofaba…