**NÚMEROS**
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 75, noviembre de 2010, páginas 71–87

# Deducción y extensión más general del teorema de Pitágoras

**Julio C. Barreto García** (L. B José Antonio Sosa Guillen, L. B José Antonio Páez, UPEL-IMPM)

*Fecha de recepción: 11 de agosto de 2009*
*Fecha de aceptación: 28 de mayo de 2010*

**Resumen** En este trabajo expresamos de manera deductiva otras explicaciones en torno al Teorema de Pitágoras tomando en consideración la idea de área, las cuales tratándolas desde un punto de vista didáctico pueden ayudarnos en el proceso de enseñanza. Pasaremos de un caso particular en el cual los lados del triángulo rectángulo tienen cuadrados sobre sus lados, a un caso un poco general en el cual sean triángulos equiláteros, pentágonos, otros polígonos, semicírculos, lúnulas, etc.

**Palabras clave** Área, Productos Notables, Teorema de Pitágoras, Cuadratura, Media Geométrica.

**Abstract** In this paper we express in a deductive way other explanations about the Pythagorean Theorem, taking into consideration the idea of area, which dealt with from an educational point of view can help in the teaching process. We come from a particular case in which the sides of the triangle are squares on its sides, a little at a general case in which are equilateral triangles, pentagons, other polygons, semicircles, Lúnula etc.

**Keywords** Area, Products Remarkable Theorem of Pythagoras, Quadrature, Geometric Mean.

## 1. Introducción

Durante mucho tiempo, tomando en consideración la idea de área se ha pensado en la posibilidad de construir figuras geométricas sobre los lados del triángulo rectángulo que cumplan esta relación y operando con los triángulos equiláteros, polígonos regulares, semicírculos y lúnulas, etc. nos dimos cuenta que efectivamente se cumple la relación Pitagórica, siempre y cuando se coloquen sobre los lados del triángulo rectángulo figuras geométricas que cumplan lo siguiente: Sobre las longitudes de los catetos colocamos figuras que sean semejantes con la figura colocada sobre la longitud de la hipotenusa; esto en el caso que sean poligonales, o en un caso aun mas general hablaremos de figuras homotéticas. Esta nueva forma de ver el Teorema de Pitágoras, mas general a la de Bhaskara, permitirá a nuestros estudiantes divertirse operando con figuras geométricas junto a sus compañeros fomentando la unión grupal y les servirá para ir conociendo un poco lo que en matemática significa el concepto de generalización o extensión, no solo por el hecho de no ser ya cuadrados, sino por que aprenderán a cuadrar los triángulos y a partir de allí podemos aplicárselos a cualquier polígono bien sea este regular o no mediante triangulación y aplicaciones repetidas del teorema de Pitágoras, dividiendo los polígonos en varios triángulos.

**Sociedad Canaria *Isaac Newton***
**de Profesores de Matemáticas**

## 2. Teorema de Pitágoras: Métodos Geométricos

*"La imaginación tiene sobre nosotros mucho más imperio que la realidad."*

Jean de la Fontaine

Según lo deducido en (Barreto, 2008) tenemos que se cumple que:

**Teorema 1:** En todo triángulo rectángulo, el área del cuadrado construido sobre la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre las longitudes de los catetos.

Podemos también hablar del reciproco de este teorema de manera intuitiva, pues a partir de estos tres cuadrados podemos formar un único triángulo rectángulo. El cual es el Teorema reciproco:

**Teorema 1.1 (Reciproco[1]):** Si se cumple que al formar un triángulo con los cuadrados de lados $c$ (amarillo), y de lados $a$ y $b$ (azul y rojo), el área del cuadrado más grande de lado $c$ (amarillo) es igual a la suma de las áreas de los otros dos cuadrados menores $a$ y $b$ (azul y rojo), entonces el triángulo que forman es rectángulo (el ángulo opuesto al lado $c$ es recto).

Este estudio geométrico de la posibilidad de sumar (unión) estas áreas de estos polígonos (triángulos, rectángulos y cuadrados) se sustentan en la teoría de conjunto elemental tomada de (Barreto, 2008) donde se llama elemental si se puede expresar como unión finita de triángulos y rectángulos. Cualquier polígono es un buen ejemplo de un conjunto elemental y se tiene el siguiente axioma que dice que: El área de un conjunto elemental es aditiva.

Aceptando la versión usual del Teorema de Pitágoras (**Teorema 1**), mediante una *aprehensión perceptiva* la cual, es la primera en ser usada a lo largo de toda la etapa educativa y también la primera que aparece en el desarrollo cognitivo del alumno y es un proceso más intuitivo e identificativo, se puede demostrar según (Barreto, 2009) que se cumple la relación pitagórica para triángulos equiláteros construidos sobre sus longitudes de un triángulo rectángulo.

**Teorema 2:** En todo triángulo rectángulo, el área del triángulo equilátero construido sobre la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los triángulos equiláteros construidos sobre las longitudes de los catetos.

Esta se puede deducir de acuerdo con (Barreto, 2009) usando la siguiente proposición:

**La Cuadratura del Rectángulo:** Este problema es el mas sencillo de plantear ya que consiste en encontrar un cuadrado equivalente a un rectángulo dado.

La solución de este problema según (Jiménez, 2004), está en la *proposición 13 del sexto libro de los Elementos*, en la que se muestra como *construir* un segmento que sea media geométrica entre otros dos.

[1] En el Teorema (Directo) se tiene que: Si *H* (hipótesis, que es lo que se supone que se verifica), entonces *T* (tesis, que es lo que se quiere demostrar), en el Teorema Reciproco se tiene que la hipótesis pasa a ser la tesis y la tesis es la hipótesis. No siempre se cumple, pero en el caso del Teorema de Pitágoras se cumple siempre para cualquier caso de figuras construidas sobre el triángulo rectángulo que sean homotéticas como veremos más adelante hasta el final del artículo.

Teniendo en cuenta la siguiente definición, podemos dar otra extensión:

**Definición 2:** Dos rectángulos son semejantes si sus lados correspondientes son proporcionales; en otras palabras: Si uno de los rectángulos tiene dimensiones $b_1, h_1$ y el otro dimensiones $b_2, h_2$, entonces:

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{h_1}{h_2}$$

Donde $b_1, b_2$ son las bases de los rectángulos y $h_1, h_2$ las alturas de los mismos.

**Nota:** Verificar que con estos rectángulos podemos formar a lo más dos triángulos rectángulos colocando estos rectángulos semejantes (Verificar esta semejanza mencionada) formando los lados de estos dos triángulos rectángulos. Y tenemos la siguiente **Figura 1** de abajo:

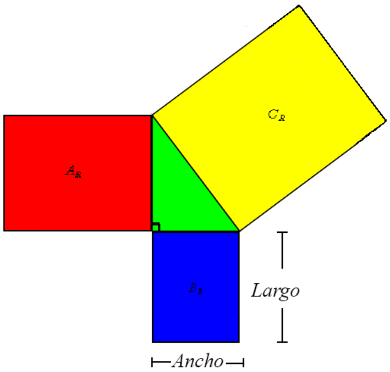


**Figura 1:** En la figura vemos geométricamente el Teorema de Pitágoras, donde se extiende el caso a otras figuras geométricas poligonales como son los rectángulos, es decir, $C_R = A_R + B_R$.

Y podemos enunciar el siguiente corolario[2]:

**Corolario 2.1:** Dado un triángulo rectángulo y sobre sus lados se construyen tres rectángulos semejantes, entonces se cumple el área del rectángulo construido sobre la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los rectángulos semejantes construidos sobre la longitud de los catetos.

**Observación:** Colocamos lo anterior como una *conclusión* que en el lenguaje matemático es llamado corolario, en vez de un Teorema puesto que la *construcción* de los rectángulos no salen hasta el momento tan directamente. Por esto parece también ser más bien un *problema* muy interesante que involucra el uso de figuras poligonales semejantes más allá del hecho que estos sean únicamente rectángulos.

**Nota:** Al igual que lo dibujamos para el rectángulo azul de la **Figura 1**, el rectángulo rojo y amarillo también tienen su largo y ancho. Además, podemos colocarlo mediante los largos de cada rectángulo y también podemos formar el triángulo rectángulo, es decir, se sigue cumpliendo el corolario y esto nos da indicio de la doble implicación del Teorema de Pitágoras, como habíamos comentado en el **Teorema 1.1.**

[2] Desde un punto de vista conceptual, un corolario es un Teorema. En la práctica se refiere a alguna consecuencia fácil de demostrar a partir de algún Teorema. Este es un corolario porque a parte de ser una conclusión, su demostración parte de haber demostrado el Teorema 1 (Enunciado para cuadrados).

**Un problema muy importante:** Demuestre que si dos triángulos semejantes tienen sus lados correspondientes en la razón $\frac{x}{y}$, entonces sus áreas están en razón $\frac{x^2}{y^2}$.

Y así tenemos lo siguiente conclusión o **corolario:**

**Corolario 2.2:** Dado un triángulo rectángulo, construya sobre sus lados tres triángulos semejantes. Luego se cumple que el área del triángulo construido sobre la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los triángulos semejantes construidos sobre las longitudes de los catetos. Véase la **Figura 2** de abajo:

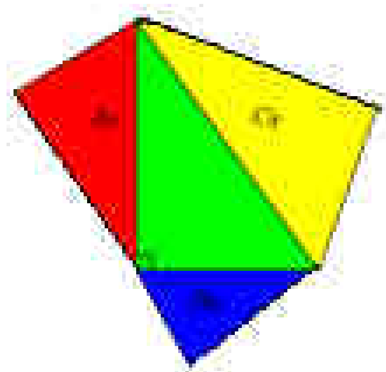

**Figura 2:** En la figura vemos geométricamente el Teorema de Pitágoras, donde se extiende el caso a otras figuras geométricas poligonales como los triángulos cualesquiera debido al problema muy importante mencionado anteriormente, es decir, $C_T = A_T + B_T$.

**Observación:** Aquí también tenemos que este es un Problema en vez de un Teorema de acuerdo a la *construcción* de los triángulos, pero que hablando en términos mas generales podemos colocarlo como un Teorema. Al cumplirse para triángulos cualesquiera también se cumplirá para cualquier paralelogramo que se coloquen sobre los lados del triángulo rectángulo (romboides, rombos, trapecios, trapezoides, etc.) los cuales deben ser figuras poligonales semejantes entre si.

Se puede utilizar el procedimiento mencionado en la cuadratura del rectángulo a los triángulos equiláteros, pero tomando ahora la base del triángulo equilátero y la mitad de la altura para cada uno de esos triángulos equiláteros, pero no hubiésemos percibido la extensión del teorema de Pitágoras a rectángulos. Con estas herramientas a la mano es sencillo cuadrar cualquier polígono por triangulación y aplicaciones repetidas del Teorema de Pitágoras (*Proposición 47 del primer libro de los Elementos).*

Así podemos aplicar todo lo anterior a cualquier polígono que este sobre los lados del triángulo rectángulo, como por ejemplo los pentágonos y podemos concluir lo siguiente, el cual es un Teorema que se cumple para figuras poligonales regulares semejantes y se coloca como un corolario pues su demostración a parte del **Teorema 1** necesita la idea de cuadratura:

**Teorema 2.1:** En todo triángulo rectángulo, el área del pentágono regular construido sobre la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los pentágonos regulares construidos sobre las longitudes de los catetos.

Se pueden formular también un reciproco para estas figuras poligonales semejantes colocando los polígonos por cualquier lado al mismo tiempo. En una concepción más general serian figuras homotéticas, sobre la cual se seguirá cumpliendo un teorema reciproco en lo sucesivo.

Ahora veamos casos generales de homotecias, más allá de las de figuras poligonales semejantes, las cuales a partir del **Corolario 2.2** tenemos que estas no deben ser necesariamente polígonos regulares.

**Nota:** Valiéndonos de las cuadraturas tanto del triángulo como del rectángulo podemos tener las siguientes pre-generalizaciones o extensiones, teniendo en cuenta la proposición 2 del décimo segundo de los Elementos de Euclides que nos dice que *los círculos son uno a otro como los cuadrados de sus diámetros* y que además nos permite cuadrar la lúnula según el matemático griego del siglo V a. C llamado Hipócrates de Quios, para ello ver (Jiménez, 2004).

En un curso de maestría que tome en la Universidad Pedagógica Experimental Libertador, Instituto Pedagógico Barquisimeto denominado Historia de la Matemática Discreta con un destacado profesor Venezolano llamado Douglas Jiménez, el cual tiene una amplia trayectoria en historia de la matemática y es referencia en este articulo y casi todos los escrito por este autor, se discutió el origen de la letra $\pi$, y se tomó en cuenta la proposición 2 del duodécimo libro de los Elementos de Euclides que nos dice que: "*Los círculos son uno a otro como los cuadrados de sus diámetros*". En la referencia de (Barreto, 2009) se dice que en el lenguaje moderno, si es $A_i$ el área de un círculo $i$ de diámetro $d_i$ entonces

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{d_1{}^2}{d_2{}^2} \qquad (1)$$

Independientemente de los círculos $A_1$ y $A_2$. El cual en notación de proporción es $A_1 : A_2 :: d_1{}^2 : d_2{}^2$. Ésta demostrada en los Elementos de Euclides con una base teórica provista por uno de los mejores discípulos de Platón, el matemático Eudoxo. Se conoce como método de exhaución y es uno de los antecedentes del moderno cálculo integral. La demostración según vimos en el desarrollo del curso de maestría procede por comparación del área del círculo con las áreas de los polígonos regulares inscritos en la circunferencia y el análisis de las pequeñas diferencias entre estas áreas, que se reducen al aumentar el número de lados de los polígonos.

Sin duda que en este aspecto quien recoge los más cerrados aplausos es Arquímedes, en particular con su pequeña obra **Medida del círculo**, de la que queremos comentar algunos puntos. Demostraciones como estas, basadas en procesos que potencialmente estamos en capacidad de repetir cuantas veces deseemos, es decir lo que hoy llamamos procesos infinitos, mostraban la dificultad de conseguir la cuadratura del círculo. Arquímedes se apoyo en la proposición 1 del duodécimo libro de los elementos de Euclides que dice: "*Los polígonos semejantes inscritos en círculos son el uno al otro como los cuadrados de sus diámetros*". Aunque cabe destacar que Arquímedes no uso polígonos circunscritos sino que razono por reducción al absurdo, la cual era un razonamiento muy usado en estos tiempos para evitar los procesos infinitos.

El número $\pi$, aparece como una constante que Arquímedes encuentra de la ecuación (1), donde viéndolo de otra manera más general:

$$\frac{A_1}{d_1{}^2} = \frac{A_2}{d_2{}^2} = \cdots = \frac{A}{d^2} = k.$$

De donde obtenemos usando el hecho que el diámetro de la circunferencia es el doble del radio de la misma, se tiene lo siguiente:

$$A = kd^2 \Rightarrow A = k(2r)^2 \Rightarrow A = k4r^2 \Rightarrow A = (4k)r^2.$$

De aquí, notando que si la constante es $\pi = 4k$, observamos que $k = \dfrac{\pi}{4}$ el cual es la forma que tiene precisamente la constante para hallar aproximaciones de este número irracional. Veamos algunos mentores de aproximaciones importantes de este número trascendente (o *trascendental*)[3]: En 1674 el alemán G. Leibnitz da la serie: $\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} \cdots$ Pero presenta problema pues tienen que sumarse unos 19 millones de términos para conseguir 7 decimales correctos. La fórmula desarrollada por Leonhard Euler quedaría como sigue:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3\cdot 2^3} - \frac{1}{3\cdot 3^3} + \frac{1}{5\cdot 2^5} + \frac{1}{5\cdot 3^5} - \frac{1}{7\cdot 2^7} - \frac{1}{7\cdot 3^7} + \cdots$$

En esta época se solía utilizar la letra "p" (peripheria) para designar a la razón entre circunferencia y diámetro, aunque algunos, como el inglés William Jones (1706), ya utilizaban el símbolo $\pi$. Fue Leonhard Euler quien introdujo este símbolo de forma definitiva al utilizarlo en su libro "Introductio in Analysin Infinitorum", publicado en 1748. Años más tarde, en 1764, Euler encontraría otra fórmula de convergencia rápida. En 1761 Lambert demuestra que $\pi$ es irracional, y en 1794 Legendre prueba un resultado un poco más fuerte que $\pi^2$ también es irracional. En 1882 el holandés Lindemann demuestra que $\pi$ es trascendente, lo cual supone (entre otras cosas) que la cuadratura del círculo es imposible. Este problema había permanecido sin resolver durante más de 2000 años.

Nos cuenta también (Jiménez, 2004) que manteniendo la línea de pensamiento Griego orientada hacia la comparación de figuras, Arquímedes demuestra que cualquier círculo "es igual" (es decir, tiene la misma área) que un triángulo rectángulo uno de cuyos catetos es igual al radio del círculo y el otro igual a la circunferencia del círculo, como se muestra en la **Figura 3** de abajo:

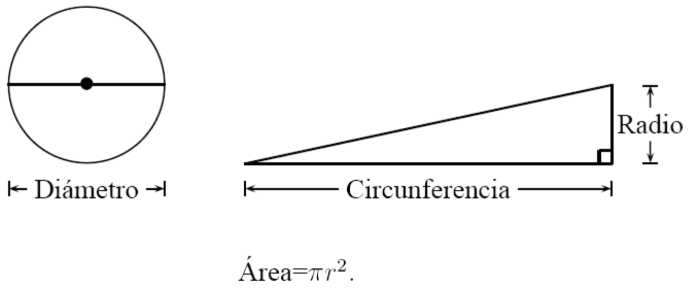


**Figura 3:** Cuadratura aproximada del circulo según Arquímedes.

La demostración de esta equivalencia es una joya intelectual tallada con dos herramientas que el analista de hoy maneja con soltura, pero que para la época en que fueron aplicadas significaron un salto intelectual de magnitud.

[3] Esta historia es tomada parcialmente de la página Web: http://centros5.pntic.mec.es/ies.de.bullas/dp/matema/conocer/numpi.htm

En la discusión del curso de postgrado de historia de la matemática discreta se realizaron cálculos anteriores, pero solo basta notar que si en la fórmula para calcular el área del triángulo deducida en (Barreto, 2008) tenemos que:

$$A_T = \frac{CR}{2}$$

Donde $A_T$ denota el área del triángulo rectángulo la base $C$ es la longitud de la circunferencia y la altura $R$ es el radio de la misma (mitad del diámetro). El área del círculo la cual la calculamos usando la *proposición 2 del duodécimo libro de los Elementos de Euclides* calculado anteriormente es:

$$A_C = \pi R^2,$$

Con $A_C$ denotando el área del circulo. La longitud de la circunferencia $C$ es precisamente demostrada por Arquímedes, usando doble reducción al absurdo, tenemos que:

$$A_C = A_T \quad (2)$$

De donde obtenemos que:

$$\pi R^2 = \frac{CR}{2}$$

Así que

$$C = 2\pi R.$$

En notación moderna usamos $L$ en vez de $C$ para denotar la longitud de la circunferencia. Aquí si razona Arquímedes por doble reducción al absurdo suponiendo desigualdades en ambas áreas, las cuales surgen de usar polígonos inscritos o circunscritos. Sabiendo que hay una razón constante entre la circunferencia de un círculo y su diámetro, así como también una razón constante entre el área de un círculo y el cuadrado de su diámetro, fue que Arquímedes se interrogó sobre la relación entre estas dos constantes, algo que hoy en día parece muy obvio para algunos matemáticos.

Ahora bien, a partir de esta forma de cuadrar aproximadamente los semicírculos que están en los lados del triángulo rectángulo podemos aplicarlo a cada uno de estos semicírculos, luego usar la cuadratura de los triángulos y seguir usando todo este procedimiento para lograr comparar estas áreas como lo hecho para el **Teorema 2**.

Aceptando la versión usual del Teorema de Pitágoras, mediante una *aprehensión perceptiva*, se puede demostrar que:

**Teorema 3:** En un triángulo rectángulo, el área de un semicírculo construida sobre la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los semicírculos construidas sobre las longitudes de los catetos. Geométricamente veamos la **Figura 4** de abajo:

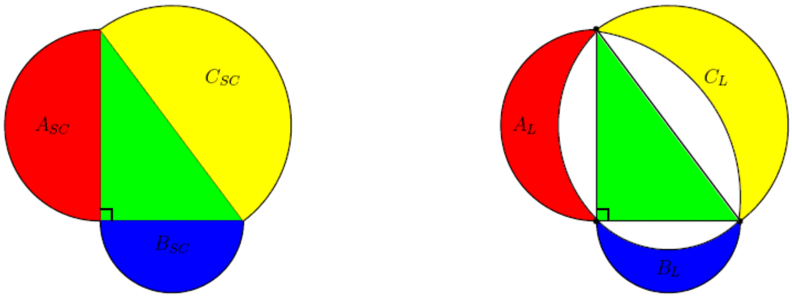


**Figura 4:** A la izquierda vemos geométricamente el Teorema de Pitágoras, donde se extiende el caso a otras figuras geométricas como los semicírculos, es decir, $C_{SC} = A_{SC} + B_{SC}$. A la derecha vemos geométricamente el Teorema de Pitágoras, donde se extiende el caso a otras figuras geométricas como las lúnulas, es decir, $C_L = A_L + B_L$.

Aceptando la versión usual del Teorema de Pitágoras, mediante una *aprehensión perceptiva*, se puede demostrar que:

**Teorema 4:** En un triángulo rectángulo, el área de la lúnula construida sobre la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de las lúnulas construidas sobre las longitudes de los catetos. Geométricamente, véase la **Figura 4** de arriba.

Veamos el Teorema de Pitágoras en su acepción geométrica para casos generales de homotecias usados anteriormente y desarrollados por (Barreto, 2009), usando la *Didáctica del Análisis Matemático*, considerando los procesos asociados de definición, prueba y demostración, que se han venido enriqueciendo en los modelos que sirven para describir los *procesos cognitivos* de aprendizaje de los estudiantes en un nivel donde el pensamiento no solo debe ser más abstracto sino que además debe ser mas formal a la hora de definir los entes involucrados en la teoría y de demostrar los que sean necesarios al momento de desarrollar un tema especifico (Azcárate, C y Camacho, M., 2003). Además comentan (Azcárate, C y Camacho, M, 2003) que una de las formas de establecer la diferencia entre las matemáticas elementales y las avanzadas es considerar que, en las primeras, los objetos se describen como es el caso de homotecias en bachillerato, mientras en las segundas a nivel universitario, se definen y se le pueden dar características superiores como transformaciones.

## 3. Demostración general del Teorema de Pitágoras usando Cálculo Integral

Dado el siguiente problema general del Teorema de Pitágoras mostrado en la **Figura 5**:

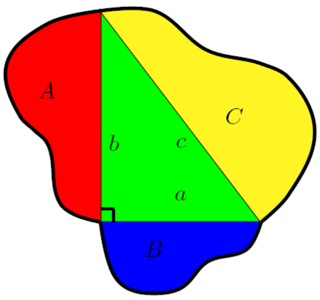


**Figura 5:** Geométricamente una extensión del Teorema de Pitágoras, donde se satisface que $C = A + B$.

Deduzca las transformaciones:

$$g(x) = \frac{b}{c} f\left(\frac{c}{b}x\right) \quad \text{y} \quad h(x) = \frac{a}{c} f\left(\frac{c}{a}x\right).$$

Donde las funciones homotéticas son:

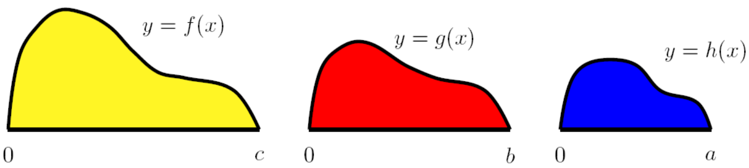


**Figura 6:** Representación grafica de las generales en el intervalo comprendido entre el 0 y el valor de longitud en los lados del triángulo rectángulo dado. Además mostramos el área de cada una de ellas de diferentes colores.

Y pruebe que se cumple lo siguiente:

$$\int_0^a h(x)dx + \int_0^b g(x)dx = \int_0^c f(x)dx.$$

**Prueba**[4]**:**

Consideremos $f, g$ y $h$ funciones continuas, dadas de la siguiente manera:

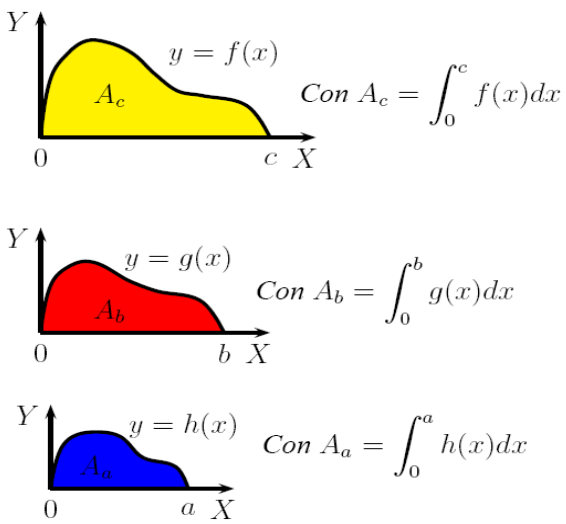


**Figura 7:** Representación grafica de las funciones continuas en el intervalo comprendido entre el 0 y el valor de longitud en los lados del triángulo rectángulo. A la derecha se muestra la forma de calcular sus áreas.

Donde cada una de estas áreas se puede calcular usando la Integral de Riemann al ser continuas (aunque se podrán dar casos donde las funciones pueden tener cierto número de discontinuidades).

[4] Razonamiento mediante el cual se establece la verdad de un enunciado matemático apoyándose en premisas admitidas como verdaderas y en otros enunciados ya demostrados. Es la deducción o razonamiento lógico que se hace a los fines de que a partir de la hipótesis y de los resultados conocidos (axiomas, definiciones, lemas, teoremas) se pueda concluir la tesis. Algunas veces es llamado demostración.

Ahora hallemos las transformaciones de semejanzas que tienen $g$ y $h$ con $f$. Primero veamos la transformación de $g$ con respecto a $f$. Sean las gráficas de $f$ y $g$, siguientes:

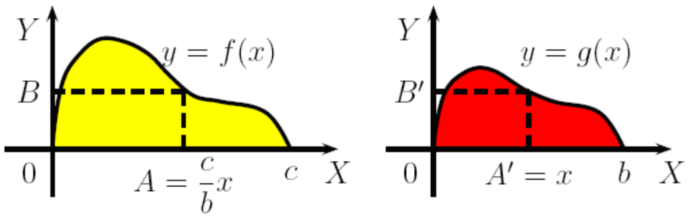


**Figura 8:** Ubicación de los puntos en las funciones $f$ y $g$, para hallar los puntos que son homotéticos, pues las funciones involucradas en este caso son homotéticas.

Sabiendo que si $0 \leq x \leq b$, entonces $0 \leq \frac{c}{b}x \leq c$. Ahora, sea este punto en la gráfica $A = \frac{c}{b}x$, el cual es una ampliación a *escala*[5] del punto $A' = x$, luego tenemos de acuerdo a la transformación de semejanza que se cumple:

$$k = \frac{A}{A'} = \frac{\frac{c}{b}x}{x} = \frac{c}{b}.$$

Así,
$$k = \frac{c}{b}. \qquad \text{(I)}$$

Además, tenemos también que:

$$B = f\left(\frac{c}{b}x\right),$$

Con:
$$B' = g(x).$$

Por lo que, de acuerdo a la transformación de coordenadas tenemos que:

$$k = \frac{B}{B'} = \frac{f\left(\frac{c}{b}x\right)}{g(x)}.$$

Es decir,

$$k = \frac{f\left(\frac{c}{b}x\right)}{g(x)}. \qquad \text{(II)}$$

[5] Escala se define como la relación entre la dimensión dibujada respecto a su dimensión real, esto es,

$$\mathrm{E} = \frac{\text{Dibujo}}{\text{Realidad}}.$$

Si el numerador de esta fracción es mayor que el denominador se trata de una escala de ampliación, y será de reducción en caso contrario.

Luego, del sistema determinado por las *coordenadas*[6], tenemos de $(\mathrm{I})$ y $(\mathrm{II})$ tenemos que:

$$\frac{c}{b}=\frac{f\left(\frac{c}{b}x\right)}{g(x)}.$$

O bien, $$g(x)=\frac{b}{c}f\left(\frac{c}{b}x\right).$$

Así, definamos por *homotecia* la transformación:

$$\begin{aligned} g:[0,c]&\rightarrow[0,b]\\ x&\rightarrow g(x)=\frac{b}{c}f\left(\frac{c}{b}x\right)\end{aligned}$$

Análogamente, tenemos:

$$\begin{aligned} h:[0,c]&\rightarrow[0,a]\\ x&\rightarrow h(x)=\frac{a}{c}f\left(\frac{c}{a}x\right)\end{aligned}$$

Ahora, hallemos el área de $g$ y $h$, esto es,

$$A_b=\int_0^b g(x)dx=\int_0^b\frac{b}{c}f\left(\frac{c}{b}x\right)dx=\frac{b}{c}\int_0^b f\left(\frac{c}{b}x\right)dx=\frac{b^2}{c^2}\int_0^c f(u)du$$

Haciendo $u=\frac{c}{b}x,\ dx=\frac{b}{c}du$ con $u\rightarrow 0$ si $x\rightarrow 0$ y $u\rightarrow c$ si $x\rightarrow b.$

$$A_b=\frac{b^2}{c^2}A_c.$$

Análogamente, podemos obtener: $A_a=\dfrac{a^2}{c^2}A_c.$

Así,

---

[6] Para obtenerlas se parte de un punto escogido arbitrariamente, al cual se llama centro de homotecia, del cual se trazan segmentos de recta, tantos como vértices tenga la figura que se va a transformar, se debe considerar otro elemento básico para desarrollar esta transformación, siendo esta una constante, la cual se denomina constante de homotecia que viene a ser la escala en la cual se realiza la reproducción.

Se considera $(\mathrm{A},\mathrm{A}')$ y su *homotético* $(\mathrm{B},\mathrm{B}'),$ la relación que hay entre ellos es la siguiente:

$$x'=\kappa x$$

$$y'=\kappa y$$

el cual es una relación entre las coordenadas de los puntos *homotéticos.* Es llamada *homotecia* de centro el origen de coordenadas y no es más que una transformación de semejanza.

$$\begin{aligned} A_a + A_b &= \frac{a^2}{c^2}A_c + \frac{b^2}{c^2}A_c = \left(\frac{a^2}{c^2}+\frac{b^2}{c^2}\right)A_c \\ &= \left(\frac{a^2+b^2}{c^2}\right)A_c = \left(\frac{c^2}{c^2}\right)A_c \quad \text{(pués el triángulo es rectángulo)} \\ &= A_c. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\int_0^a h(x)dx + \int_0^b g(x)dx = \int_0^c f(x)dx \ .$$

**Ejemplo:** Dada la extensión del teorema de Pitágoras para triángulos equiláteros en el **Teorema 2**, podemos formar la función $y = f(x)$ la cual es una función llamada valor absoluto a partir de la **Figura 9** de abajo:

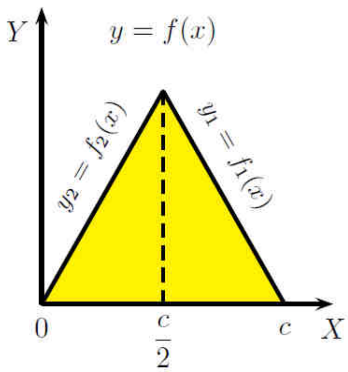


**Figura 9:** Representación grafica de la función $y = f(x)$.

Ahora sacando algunos cálculos, teniendo en consideración la definición de recta y de valor absoluto, obtenemos:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{si } \frac{c}{2} \le x \le c, \\ f_2(x), & \text{si } 0 \le x \le \frac{c}{2}. \end{cases} = \begin{cases} -\sqrt{3}x + \sqrt{3c}, & \text{si } \frac{c}{2} \le x \le c, \\ \sqrt{3}c, & \text{si } 0 \le x \le \frac{c}{2}. \end{cases}$$

$$= -\left|\sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}}{2}c\right| + \frac{\sqrt{3}}{2}c, \ \text{si } 0 \le x \le c.$$

Denotando por $A_c$ el área entre 0 y $c$ de $y = f(x)$ y siendo esta función Riemann integrable, tiene sentido:

$$A_c = \int_0^c f(x)dx = \int_0^{\frac{c}{2}} \sqrt{3}xdx - \int_{\frac{c}{2}}^{c} \sqrt{3}xdx + \frac{\sqrt{3}c^2}{2}. \qquad (*)$$

**Ejercicio:** Verificar que la función $y = f(x)$ tiene en realidad esta forma y luego realizar los cálculos de $A_c$ para ver que efectivamente da la parte de arriba. Esta función es Riemann integrable pues tiene un solo punto de discontinuidad en $\frac{c}{2}$. Análogamente de encuentre funciones $y = g(x)$ y $y = h(x)$, para las otras funciones y teniendo en cuenta que:

$$g(x) = \frac{b}{c} f\left(\frac{c}{b}x\right), \quad \text{con } f\left(\frac{c}{b}x\right) = -\left|\sqrt{3}\frac{c}{b}x - \frac{\sqrt{3}}{2}c\right| + \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

$$h(x) = \frac{a}{c} f\left(\frac{c}{a}x\right), \quad \text{con } f\left(\frac{c}{a}x\right) = -\left|\sqrt{3}\frac{c}{a}x - \frac{\sqrt{3}}{2}c\right| + \frac{\sqrt{3}}{2}c.$$

Integrando según Riemann tenemos que:

$$A_a + A_b = A_c.$$

## 3.1. Invarianza por traslación de las figuras geométricas

En la prueba colocamos las figuras en el origen de coordenadas como lo vimos allá arriba en la **Figura 8** pero esto no es absolutamente necesario, pues lo podemos hacer de acuerdo lo mostrado en la **Figura 10** de abajo:

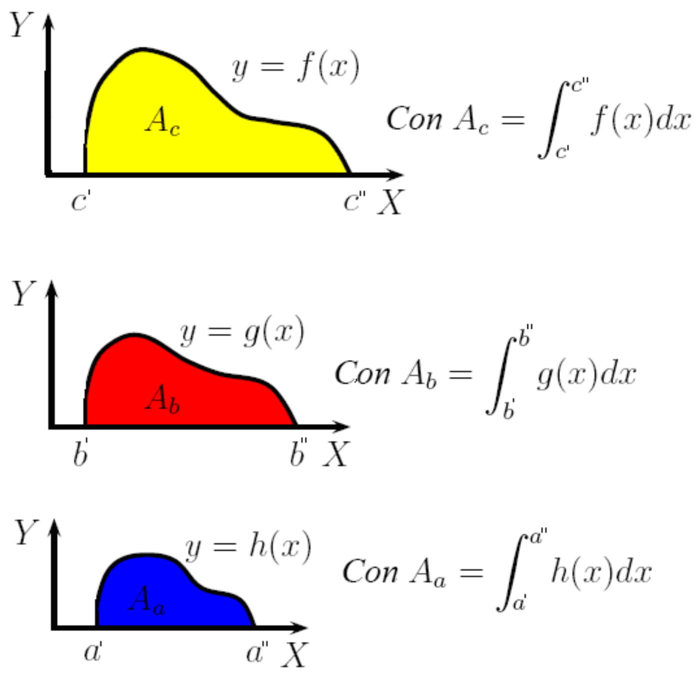


**Figura 10:** Representación grafica de las funciones en el intervalo comprendido entre el un intervalo trasladado pero manteniendo la longitudes de cada lado según los lados del triángulo rectángulo. A la derecha se muestra la forma de calcular sus áreas, de acuerdo con esta nueva configuración.

Donde se cumple pueden hacer los siguientes cambios de longitudes: $c'' - c' = c,\ b'' - b' = b$ y $a'' - a' = a.$

Y tenemos que $(c'' - c')^2 = (b'' - b')^2 + (a'' - a')^2$, esto debido a que se cumple que $c^2 = b^2 + a^2$. Esto lo vamos a usar cuando calculemos el área de cada región y al final decir que están sobre un triángulo rectángulo, como se hizo al final de la demostración anterior.

Además, veamos que si el área sobresale del triángulo rectángulo como en el caso de los pentágonos regulares, también se cumple de manera general el Teorema de Pitágoras. Esto lo podemos mostrar en la **Figura 11** de abajo:

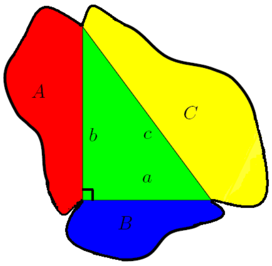


**Figura 11:** En la figura vemos geométricamente una extensión aun mas general del Teorema de Pitágoras, donde se satisface que $C = A + B.$

Lo cual lo podemos ver gráficamente colocándolas como las funciones $f(x), g(x)$ y $h(x)$ en las cuales vamos a calcular el área que esta debajo de estas funciones las cuales están colocadas de diferentes colores amarillo, rojo y azul respectivamente. Veamos la **Figura 12** de abajo:

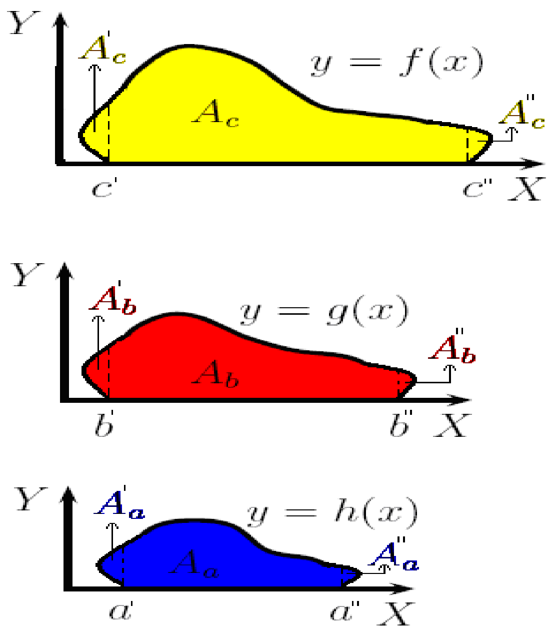


**Figura 12:** Representación grafica de las funciones en el intervalo comprendido dos puntos cualesquiera como por ejemplo $c'$ y $c''$ de la primera figura, sabiendo que este es un intervalo trasladado pero manteniendo la longitudes de cada lado según los lados del triángulo rectángulo. Esto es válido para las tres figuras de acá, pues probamos la invarianza por traslación en la parte anterior.

Sabemos de lo anterior que $A_c = A_a + A_b$ $(\mathrm{I})$, de acuerdo a lo demostrado en el apartado anterior, sobre todo lo mostrado en la **Figura 11**, donde se pueden trasladar las áreas.

Ahora, veamos la **Figura 12** anterior que se puede formar un triángulo rectángulo con las regiones $A'_c, A'_b$ y $A'_a$ los cuales van a tener como longitudes los segmentos $\overline{c'c'''}$, $\overline{b'b'''}$ y $\overline{a'a'''}$ como vemos en las figuras siguientes (**13** y **14**) y además cumpliendo también que con las longitudes de los segmentos $\overline{c''c^{IV}}$, $\overline{b''b^{IV}}$ y $\overline{a''a^{IV}}$ se puede forman también un triángulo rectángulo con las regiones $A''_c, A''_b$ y $A''_a$, por ejemplo veamos la **Figura 13** de abajo:

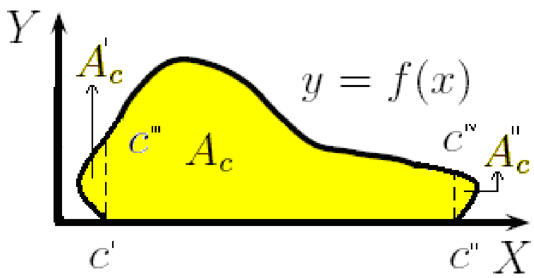


**Figura 13:** Configuración de la región debajo de la función $y = f(x)$, la cual se va a dividir en varias regiones para calcular su área.

Donde se cumple que: $A'_c = \int_{c'}^{c'''} f(x)dx$ y $A''_c = \int_{c''}^{c^{IV}} f(x)dx$

Además, tenemos también que según la **Figura 14** de abajo:

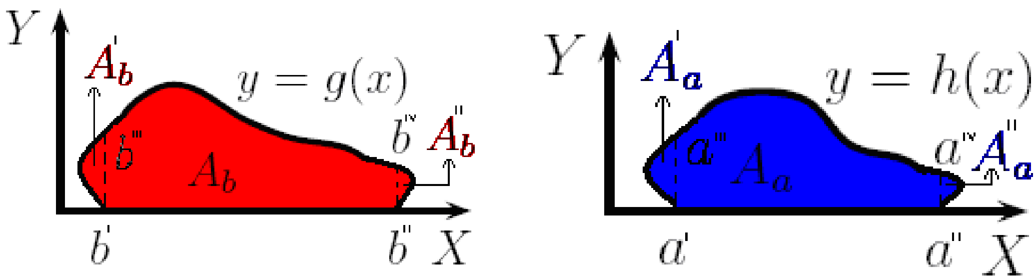


**Figura 14:** A la izquierda una configuración de la región debajo de la función $y = g(x)$, la cual se va a dividir en varias regiones para calcular su área. A la derecha una configuración de la región debajo de la función $y = f(x)$, la cual se va a dividir en varias regiones para calcular su área.

Cumpliéndose que: $A'_b = \int_{b'}^{b'''} g(x)dx$ y $A''_b = \int_{b''}^{b^{IV}} g(x)dx$

$$A'_a = \int_{a'}^{a'''} h(x)dx \quad \text{y} \quad A''_a = \int_{a''}^{a^{IV}} h(x)dx$$

Así, tenemos que:

$$A'_c = A'_b + A'_a \qquad \text{y} \qquad A''_c = A''_b + A''_a \qquad \text{(II)}$$

Lo cual de (I) y (II) nos da como resultado que: $C = A + B$.

*"Ninguna investigación merece el nombre de ciencia si no pasa por la demostración".*

Leonardo da Vinci (1452-1519). Pintor, arquitecto, ingeniero Italiano.

## Bibliografía

Azcárate, C y Camacho, M. (2003). Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis Matemático. Venezuela: Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, Vol. 10 (2), pp. 135-149.

Barreto, J (2007). Otras deducciones del teorema de Pitágoras a lo largo de la historia de la matemática, como recurso didáctico en el proceso de enseñanza aprendizaje. F González (Presidente). Memorias del VI Congreso Venezolano de Educación Matemática. (pp. 537-546). Maracay: Universidad Pedagógica Experimental Libertador.

Barreto, J. (2008). Deducciones de las fórmulas para calcular las áreas de figuras geométricas a través de procesos cognitivos. *Números* [en línea] 69. Recuperado el 20 de abril de 2009, de http://www.sinewton.org/numeros

Barreto, J. (2008). Deducciones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la matemática. *Números* [en línea] 69. Recuperado el 20 de abril de 2009, de http://www.sinewton.org/numeros

Barreto, J. (2009). Cuadratura, primera noción de área y su aplicación en la expresión del área de diferentes figuras geométricas como recurso didáctico en la extensión geométrica del teorema de Pitágoras. Versión electrónica. *UNION* [en línea] 17. Recuperado el 20 de abril de 2009, de http://www.fisem.org

Barreto, J. (2009). Otras deducciones o extensiones del Teorema de Pitágoras a lo largo de la historia como recurso didáctico. Números [en línea] 70. Recuperado el 15 de junio de 2009, de http://www.sinewton.org/numeros

Barreto, J. (2009). Percepción geométrica de los productos notables y de la media geométrica. Versión electrónica. *Números* [en línea] 71. Recuperado el 8 de marzo de 2010, de http://www.sinewton.org/numeros

Barreto, J. (2009). Deducción geométrica de la ecuación cuadrática y su aplicación didáctica en el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática. *Revista Premisa* (43), pp. 33-47.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mannana. V. Villani (Eds), Perspective on the Teaching of the Geometry for the 21st Century (pp. 37-51). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mannana. V. Villani (Eds), Perspective on the Teaching of the Geometry for the 21$^{st}$ Century (pp. 37-51). Dordrecht, Netherlands: *Kluwer Academic Publishers.*

Enciclopedia del Estudiante Larousse. (1999). Matemática e Informática. Edición especial en lengua española de la Encyclopédie des Jerines, Larousse S.A.

Jiménez, D. (2004). $\pi$ la letra griega que los griegos no usaron. Venezuela: *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol. 11 (1), pp. 103-117.

Jiménez, D. (2005). *Geometría, el encanto de la forma*. Colección Minerva N$^{\underline{0}}$ 36. Los libros de El Nacional. Editorial CEC, SA. Caracas, Venezuela.

Jiménez, D. (2007). *Historia de la Matemática: Una visión del Pitagorismo*. TForMa. UDO. Cumana Estado Sucre.

Mora, D. (2002). *Didáctica de las matemáticas en la educación venezolana*. (Ediciones Biblioteca-EBUC). Caracas, Venezuela.

Purcell, E. (1993). *Cálculo con Geometría Analítica*. (6ª ed.). Prentice Hall Hispanoamericana, S.A. México-Englewood Cliffs.

Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de los Procesos Cognitivos en Geometría. *Relime*, 10 (2), pp. 273-300. México: Publicación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

**Julio Cesar Barreto García,** nací en la ciudad de San Felipe estado Yaracuy (Venezuela). Licenciado en Ciencias Matemáticas por la Universidad Centroccidental "Lisandro Alvarado". Aprovecho la oportunidad para agradecer públicamente la ayuda académica, moral y espiritual prestada para mis artículos por parte del profesor Douglas Jiménez, a quien le pido a Dios darle vida y salud para que siga contribuyendo en el regalo del conocimiento de la matemática en general, además cabe mencionar que gran parte de la Demostración General del Teorema de Pitágoras la debo también a su noble colaboración. Actualmente soy profesor de Física y Matemática en educación media y diversificada en: LB José Antonio Sosa Guillen, Palito Blanco estado Yaracuy, L.B. José Antonio Páez, Boraure estado Yaracuy, Instituto Técnico y Manual Lissette Rodríguez delegado del Instituto Nacional de Capacitación y Educación Socialista. A nivel universitario soy docente tutor del área de Matemática (Estadística aplicada a la educación, Cálculo diferencial e integral con funciones de varias variables e Introducción al álgebra lineal) en el Instituto de Mejoramiento Profesional del Magisterio- Universidad Pedagógica Experimental Libertador, núcleo San Felipe estado Yaracuy.
Email: juliocbarretog@hotmail.com