

## Coloreando la geografía desde el plano al toroide

Teresa Braicovich y Raquel Cognigni (Universidad Nacional del Comahue. Argentina)

---

### Resumen

El tema “grafos”, en general, no se encuentra en los programas oficiales de los distintos niveles educativos, ni en su faceta “matemática pura” ni desde sus conceptos básicos que, creemos, pueden ser utilizados como un juego de manera muy intuitiva con niños desde corta edad. En esta oportunidad trabajamos con el tema coloreo de grafos, experiencia realizada con niños de edades comprendidas entre los 5 y los 14 años de edad, y que presentamos en este trabajo con el análisis correspondiente.

### Palabras clave

Coloreo, mapa, grafo, toroide, grafo planar.

---

### Abstract

The topic “graphs”, in general, thinks neither in the official programs of the different educational levels, nor in his funny " pure mathematics " not from his basic concepts that, we believe, they can be used as a game of a very intuitive way by children from short age. At this opportunity we are employed with the topic I color of graphs, experience realized with children of ages understood between the 5 and 14 years of age, and that we sense beforehand in this work with the corresponding analysis.

### Keywords

Color, map, graphs, toroidal, planar graph.

---

## 1. Introducción

El tema “grafos” no es muy conocido por los docentes de enseñanza primaria y secundaria. Esto se puede asociar al hecho de que a nuestro pensamiento, formado pura y exclusivamente en la Geometría Euclidiana, le cuesta acomodarse a propiedades, conceptos, ideas, con una mirada diferente, con una mirada “no euclidiana” y captar la riqueza de estos temas que, estamos convencidas, pueden ser tan formadores del pensamiento matemático como los de los currículos oficiales. Si apuntamos a lograr en nuestros estudiantes un pensamiento lógico, de gran intuición y que resuelva con ingenio las dificultades, este material nos brinda una amplia gama de posibilidades que proponemos no desperdiciar, atendiendo a que el alumno debe apropiarse del conocimiento matemático, “*el razonamiento y la demostración matemáticos proporcionan modos potentes de desarrollar y codificar conocimientos sobre una amplia variedad de fenómenos. Las personas que razonan y piensan analíticamente tienden a percibir patrones, estructuras o regularidades...y conjeturan y demuestran*”. (NCTM, 2003, p. 59).

Es importante destacar que en los estándares (NCTM, 2003; p. 33) se puede leer: “*En estos estándares se integran tres importantes áreas de la Matemática Discreta: combinatoria, iteración y recursión, y grafos. Estas nociones pueden desarrollarse sistemáticamente desde Prekindergarten (Nivel Inicial) al último nivel*”.

En este sentido, hemos tomado una rama no demasiado explorada de la matemática en estos niveles educativos, e incursionamos por caminos diferentes y con alumnos de distintas edades para



“hacer” matemática de una manera primitiva y no estructurada, a partir del uso de material concreto y de la presentación de problemas como desafío, como juego, donde la actitud del docente debe ser de búsqueda permanente. De esta manera, el alumno siente que quien le enseña tampoco conoce la respuesta de antemano, el factor sorpresa juega un importantísimo rol estimulador, y donde el clima de trabajo es tal que conviven en armonía las distintas habilidades individuales, sin destacar a aquel alumno “hábil para las ciencias exactas”, lo que puede contribuir a aumentar la autoestima de algunos niños y, por ende, provocar un cambio de actitud frente a la asignatura.

## 2. Pertinencia de la propuesta

Puede establecerse, a modo de síntesis, que existen distintos argumentos para introducir algunos conceptos de la Teoría de Grafos en los currículos de los distintos niveles educativos. Citaremos para tal fin el texto de Rosenstein, J., Franzblau, D., Roberts, F. (1997, p. xxvii), donde se detallan los siguientes puntos:

- Referido a la aplicabilidad: en los años recientes varios temas de esta teoría han sido utilizados creando diversos modelos en distintas áreas.
- Referido a la accesibilidad: para entender las aplicaciones del tema en muchas situaciones es suficiente tener conocimientos de aritmética y en otras solamente de álgebra elemental.
- Referido a la atracción: existen algunas situaciones sencillas de resolver y también otras que hacen que los alumnos deban explorar para poder llegar a los resultados.
- Referido a la adecuación: a aquellos estudiantes que no tengan problemas en matemática les dará mayor preparación para las carreras que elijan y para los que no les va bien en esta disciplina es apropiada, pues puede dar la posibilidad de un nuevo comienzo.

Por otro lado, Friedrich Froebel, preocupado por los primeros años del ciclo escolar, subraya el carácter evolutivo del aprendizaje. En ese sentido, nos hacemos eco de las ideas siguientes: las experiencias educativas se apoyan unas sobre otras y por lo tanto están relacionadas; cuánto más significativas son las diversas experiencias, más amplio es su potencial educativo (Stone Wiske, 1999, p. 38). Considerando tales continuidades importantes, Froebel alentaba a los niños a volver a menudo a experiencias anteriores, ya que entendía que los alumnos aportarían cada vez algo diferente a ellas, ampliándolas, brindándoles nuevas posibilidades y extendiendo de esta manera su comprensión.

Dice Vito Perrone (Stone Wiske, 1999, p. 51)<sup>1</sup>: “Los estándares y marcos conceptuales sobre el currículo que se desarrolla en la actualidad ponen el énfasis en la necesidad de que los alumnos comprendan conceptos claves de las disciplinas, desarrollen disposiciones intelectuales y hábitos mentales asociados con la investigación, construyan su propia comprensión en lugar de limitarse a absorber el conocimiento creado por otros y vean conexiones entre lo que aprenden en la escuela y su vida cotidiana”. Con sus aportes, consideramos que estamos apostando a construir comprensión y desarrollar disposiciones intelectuales y hábitos mentales útiles para el crecimiento y desarrollo del alumno. En el contexto de lo planteado, que apunta a la enseñanza para la comprensión, su propuesta es reformular los contenidos de los programas vigentes en la actualidad, cuestión de vital importancia, ya que deben enfrentarse los siguientes desafíos: asegurar una propuesta de trabajo para todos los alumnos, no sólo para una elite académica, sin desestimar la rica gama de intereses y formas de expresión que los alumnos pueden presentar, ya que una pedagogía de la comprensión es claramente una pedagogía de la “inclusión”; diseñar currículos que respondan a las normas respaldadas y a las necesidades individuales de los alumnos, para mantener activo el compromiso intenso que requiere la comprensión; producir una clara evidencia del aprendizaje para que estudiantes y educadores sean

<sup>1</sup> Capítulo 1: ¿Por qué necesitamos una pedagogía de la comprensión?

responsables de su trabajo; y estimular una valoración generalizada de la comprensión y un respaldo a ella como meta educativa central.

Este trabajo nuestro tiene como objetivo secuenciar y proponer actividades, para las distintas edades evolutivas (desde los 5 a los 14 años), que consideramos permiten a los alumnos construir el concepto de coloreo de grafos. En el mismo hemos formulado algunas actividades con distinto grado de dificultad y se las hemos presentando a niños de distintas edades para observar si las resuelven con facilidad, si necesitan ayuda o si no las comprenden. De esta manera se pueden identificar edades mínimas para cada propuesta.

Nos parece interesante destacar que, simultáneamente, mientras nosotras “investigamos”, los niños “investigan”, ya que se les pone en situación de opinar, descubrir, conjeturar, crear, sugerir nuevas cosas. Se les pone en situación de pequeños y jóvenes investigadores, lo que enriquece aún más nuestro trabajo.

### 3. Desarrollo de las experiencias

Estas experiencias fueron realizadas en grupos pequeños, a lo sumo seis niños de distintas edades, desde los 5 a los 14 años, siendo el disparador: “¿Cuántos colores son necesarios para pintar un mapa, de manera que dos regiones vecinas no lleven el mismo color?”

#### 3.1. Conceptos básicos de la Teoría de Grafos

Un problema que parece haber sido mencionado por Moebius en 1840 y ser consecuencia de una hipótesis de los fabricantes de mapas dio origen a la siguiente *conjetura de los cuatro colores*: “Supuesto que cada país está constituido por una única región conexa y que toda frontera entre países está formada por arcos de curva (no las hay constituidas por un solo punto), todo mapa sobre un plano, o equivalentemente sobre la superficie de una esfera, puede colorearse utilizando a lo sumo cuatro colores y de forma que países limítrofes tengan colores distintos”. Esta conjetura mantuvo en vilo durante muchos años a los matemáticos más importantes de la época y pudo ser demostrada en 1976 por Appel y Haken.

Los esfuerzos realizados para decidir respecto de la validez de la conjetura antes mencionada impulsaron el desarrollo de la topología combinatoria y llevaron al estudio de los grafos planares, que son aquellos que pueden representarse sobre un plano de forma que sus aristas tengan en común a lo sumo sus puntos extremos. Todo grafo planar puede representarse limpiamente (sin intersecciones superfluas) sobre la esfera. Una generalización de lo precedente ha llevado al estudio de los grafos representables limpiamente en superficies distintas a la esfera y al plano. Las representaciones limpias de los grafos planares se muestran de interés, por ejemplo, en la confección de circuitos impresos en informática.

Finalmente, puede verificarse que todo mapa donde los límites sean segmentos y no puntos, trazado sobre una hoja de papel puede ser representado mediante un grafo planar donde los vértices representan a los países y las aristas entre ellos indican que los mismos son limítrofes. De lo cual resulta que la ya confirmada conjetura es equivalente a la siguiente proposición: “Para colorear los vértices de un grafo planar, de forma de 2 vértices adyacentes no tengan el mismo color, es suficiente utilizar cuatro colores”. El mínimo número de colores necesarios para colorear los vértices de un grafo  $G$  de forma que vértices adyacentes tengan colores distintos es llamado “número cromático de  $G$ ”.



### 3.2. Actividades propuestas

A continuación se presenta un detalle de los distintos encuentros mantenidos con los niños para llevar a cabo las experiencias mencionadas. Fuimos analizando cómo los chicos interpretan las consignas, cómo pueden generar hipótesis y elaborar estrategias, o simplemente observar cómo obtienen resultados a partir del ensayo y error, de una manera divertida y agradable, habiendo escuchado muchas veces frases como: “*Dame otro más difícil*” (Valentina, 9 años) o “*Yo hice un mapa que lo vas a tener que pintar con cinco colores*” (Giuliana, 10 años) o “*Quiero hacer el que está haciendo Valentina*” (Juan Cruz, 7 años).

Para realizar el análisis mencionado en el punto anterior, una de las herramientas tenidas en cuenta fueron los niveles considerados en la Taxonomía de Bloom (Fowler, 2009), los que mencionamos a continuación, ordenados de primero a sexto nivel:

- **Conocimiento:** Recordar material aprendido con anterioridad, pueden ser, hechos, términos, conceptos básicos y respuestas.
- **Comprensión:** Entender hechos e ideas organizando, comparando, traduciendo, interpretando, haciendo descripciones y exponiendo las ideas principales.
- **Aplicación:** Resolver o solucionar problemas aplicando el conocimiento adquirido, hechos, técnicas y/o reglas.
- **Análisis:** Examinar la información en diferentes partes, identificando causas y motivos; realizar inferencias y encontrar evidencias que apoyen generalizaciones.
- **Síntesis:** Compilar información y relacionarla de diferente manera combinando elementos con un nuevo patrón o proponiendo distintas alternativas de solución.
- **Evaluación:** Exponer opiniones realizando juicios sobre información, validar ideas sobre trabajo de calidad en base a criterios establecidos.

De esta manera, siguiendo el interés de los chicos y explorando las posibilidades para cada edad, pudimos hacer una propuesta de actividades, graduadas para las distintas edades evolutivas, relacionadas con el coloreo. Se mencionan las consignas dadas a los niños en cada caso y se relatan las devoluciones de ellos a continuación:

**Actividad 1: Pintar de colores diferentes las regiones que “se tocan” tratando de usar la menor cantidad posible de colores.**

*Esta actividad fue llevada a cabo con todos los niños, se dispuso de un encuentro de aproximadamente 40 minutos para cada grupo, colorearon distintas cantidades de mapas, entre 3 y 6 cada uno, los compararon y controlaron entre ellos.*

Trabajamos sobre mapas geográficos y geométricos, los mismos fueron relativamente sencillos en el comienzo. Algunos niños lograron colorear de manera adecuada en el primer intento los que les fueron dados, otros lo lograron con el refuerzo de consignas como: “*intentá usar sólo dos colores*”, y ante la sorpresa de que no les alcanzaba, se les decía: “*bueno, entonces usá tres*”, o “*entonces usá cuatro*”. Contábamos con varias copias de cada uno de los mapas dados.

No se encontró dificultad en la interpretación de la primera parte de la consigna (colores diferentes). Sí pudimos observar que a veces ellos logran centrarse sólo en una consigna, descartando la segunda. Esto sucedió en el caso de Alejo, 6 años, que dijo que usó muchos colores porque le alcanzaban los lápices de su cartuchera. De cualquier manera, con el refuerzo citado anteriormente

logró colorear adecuadamente. Se presentan, en la figura 1, dos de los coloreos realizados por él, en el primero utilizó siete colores, la misma cantidad que regiones existentes, en cambio en el otro logró colorear con tres, luego de haber realizado dos intentos:



Figura 1

Atendiendo a la taxonomía de Bloom y el pensamiento crítico, se puede inferir que en este caso los niños entendieron y recordaron la consigna, por lo tanto encontraron una coloración adecuada. Este es el primer nivel del dominio cognitivo y está asociado con conceptos básicos que los niños pudieron interpretar, por ejemplo, regiones, diferentes, menor, cantidad, etc.

Después de haber realizado algunos coloreos, se presentaron algunas situaciones en las que los chicos anticiparon resultados, como Giuliana, 10 años, que a primera vista dijo: “aquí necesitamos por lo menos tres colores, mirá”, señalando en el mapa tres países que limitan entre ellos. A partir de la aseveración correcta de esta niña, la consigna fue: “¿alcanzarán tres colores?” Con un razonamiento similar Micael, de 10 años, al ver un mapa que puede ser representado por un grafo completo de orden 4, dijo: “necesitamos 4 colores porque todas las regiones se tocan”. En este caso se detectó que los niños no se quedaron en el caso particular, pues, en cierto modo, pudieron generalizar estas situaciones. Al ver los mapas (figura 2) se dieron cuenta de que “por lo menos” hacían falta esa cantidad de colores. Esto es una forma de aplicar técnicas de manera implícita: se parte de un valor mínimo, el cual se puede mantener o bien aumentar.

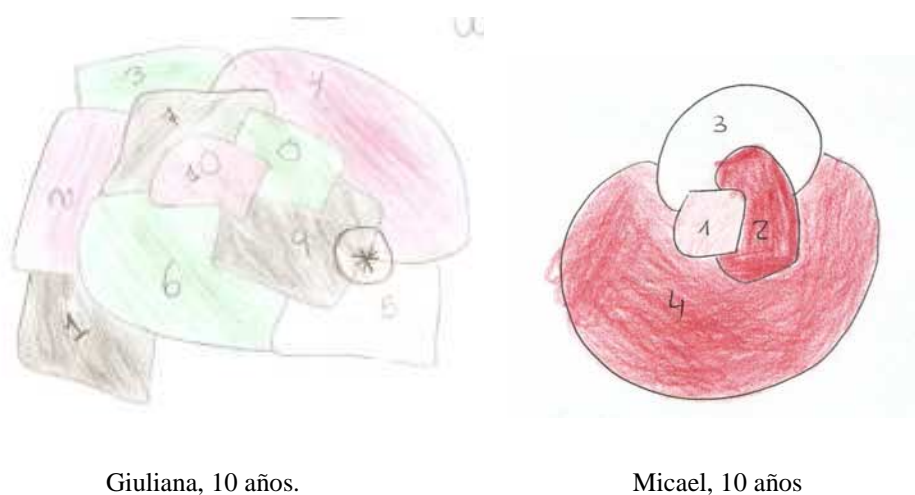


Figura 2



**Actividad 2: Construir un grafo a partir de los mapas trabajados en la actividad anterior, teniendo en cuenta que las regiones se conviertan en vértices y los límites (o fronteras) en aristas.**

*Por ser continuación de la actividad anterior, cada niño tomó algunos de los mapas que había coloreado y algunos nuevos. El tiempo no superó los 30 minutos.*

Cabe aclarar que acá se les presentó previamente la idea de grafo. Algunos niños de 7 años lograron construirlo con ayuda, pero esta experiencia nos muestra que a partir de los 8 ó 9 años lo resuelven solos, sin demasiada dificultad. Es decir, lograron inferir la relación existente entre mapas y grafos, pudieron “transferir”: esto ya se relaciona con el segundo nivel cognitivo de la taxonomía de Bloom. Algunos niños habían trabajado el concepto de grafo en experiencias previas (con recorridos) y otros lo veían por primera vez. No se notó gran diferencia entre unos y otros al enfrentarse a este problema, lo que en cierto modo permite una cierta “libertad” en la disposición de los temas.

Trabajaron de manera distinta, algunos hicieron el grafo sobre el mapa y otros lo hicieron separado del mismo, como se muestra en figura 3 y figura 4, respectivamente:

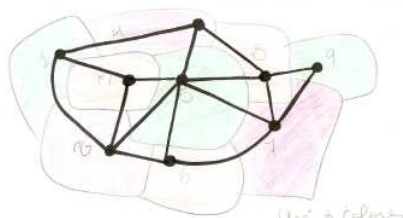
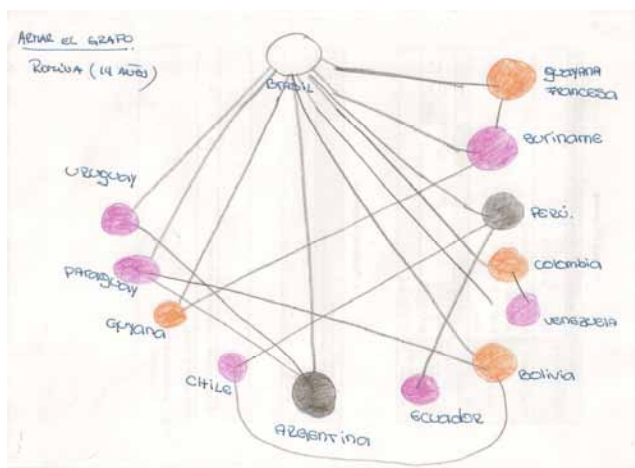


Figura 3



Romina (14 años)

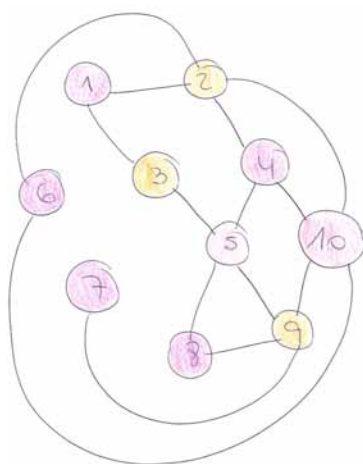
Figura 4

El lenguaje utilizado puede ser variado, cada docente le pondrá su toque personal, por ejemplo: casitas o puntos por vértices y caminos, líneas o enlaces por aristas. Se habló sin dificultad de vértices que “están unidos” o “no están unidos”, y también de vértices que “están relacionados” o “no están relacionados”. Una vez que la estructura estuvo realizada se les dijo que se llaman grafos, lo que aceptaron con total naturalidad.

**Actividad 3: Colorear los vértices de los grafos hallados, sin que los que están unidos o relacionados lleven el mismo color.**

Para esta actividad se destinaron alrededor de 20 minutos, se les dejó trabajar en los grafos que habían construido ellos y también copiaron algunos de sus compañeros para poder comparar y controlar.

Cabe aclarar que se presentó la idea de vértices adyacentes en términos de aristas en común o compartidas. La propuesta fue establecer el paralelismo entre lo que sucede en el mapa y su traducción al grafo. No se encontraron dificultades a partir de los 9 años. Los niños que hallaron de manera más rápida la relación fueron los que habían construido el grafo como se mostró en la figura 3. En general, utilizaron distintas técnicas: por ejemplo, Valentina (9 años) numeró los vértices asociando cada número a una región del mapa y coloreó ambos respetando dicha numeración (figura 5). Se puede concluir que encontraron el nexo entre mapas y grafos y también entre el coloreo de ambos.



Valentina, 9 años

Figura 5

**Actividad 4: A partir de un mapa sin colorear, traducirlo a grafo y analizar sobre éste la cantidad mínima de colores que se necesitan para un coloreo correcto.**

Esta actividad se llevó a cabo en un día posterior a las anteriores, se juntaron nuevamente por grupos, no de igual manera que en la primera reunión. Se les entregaron distintos mapas (Argentina, distintas provincias de Argentina, América del Sur, América Central y América) según las edades, los entregados a los niños menores eran más simples. Se tenía previsto destinar alrededor de 20 minutos, pero no fue suficiente ese tiempo y se trabajó en esta actividad un poco más de media hora.

No se notaron grandes dificultades, trabajaron lenta y cuidadosamente, callados y de manera reflexiva, tratando de no cometer errores. En esta actividad se trabaja en un nivel cognitivo un poco más alto, el de relacionar. Ya tienen un análisis para hacer, deben experimentar y validar sus conjeturas, construyen y se organizan para hacer los controles correspondientes. En un primer momento comparaban en el grupo y luego con los demás. También surgió la pregunta “¿es siempre lo mismo pintar un mapa que el grafo que lo representa?”, a la que pudieron responder, acertadamente, que las situaciones son equivalentes.

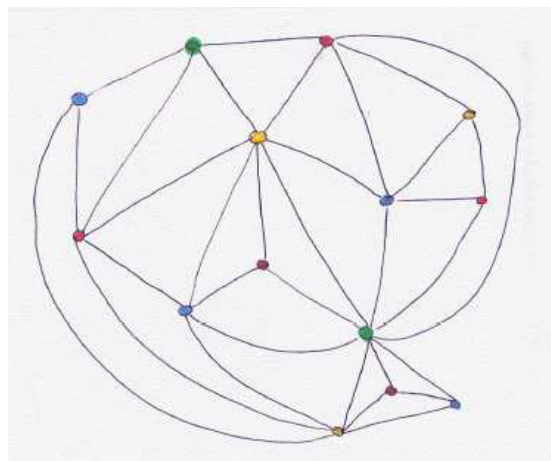


**Actividad 5: Sin utilizar mapas, proponer grafos diferentes para analizar su coloreo.**

*Fueron comenzando esta actividad a medida que terminaban la anterior. En un primer momento trabajaron en parejas, intercambiándose los grafos construidos; luego colorearon los grafos que ellos mismos proponían.*

A esta altura de la experiencia cambió el clima de trabajo. Se notó, en general, más relajado y de juego libre, pues sintieron que ya dominaban la situación, y pedían más grafos y más difíciles. Camila (9 años), dijo “*quiero uno con 20 vértices*”, como si en eso residiera la dificultad, y se sorprendió mucho cuando lo pudo pintar utilizando solamente 3 colores. En este caso particular el grafo era un ciclo de orden par con un vértice universal, que es un grafo sencillo para colorear. Allí es donde su hipótesis implícita falló, pero sabemos que se aprende tanto de las conclusiones verdaderas como de las falsas. Este tipo de actividad es muy interesante pues son ellos quiénes proponen y confrontan entre pares, seleccionan y resuelven con ciertas premisas que a su vez deberán determinar si son acertadas o no.

En esta actividad, Milagros (11 años) fue pintando un grafo realizado por ella; ya había utilizado 4 colores y le quedó sin pintar un vértice que estaba relacionado con vértices de todos los colores. Sin que se le preguntara nada, volvió a analizar su grafo y dijo textualmente: “*si al que tengo blanco (indicando el que no estaba pintado) lo pinto de rojo, entonces al rojo de al lado lo pinto de azul, porque eso sí puedo hacerlo y me quedan 4 colores en total*”. Un planteo similar hizo Rosario (13 años) y efectuó un cambio sobre dos vértices ya pintados antes de colorear los 2 vértices que le faltaban, encontrando de esta forma un coloreo óptimo, el que se muestra en la figura 6.



Rosario (13 años)

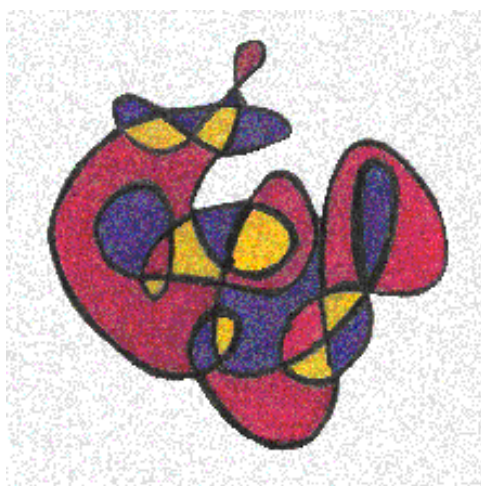
**Figura 6**

**Actividad 6: Construir mapas para desafiar a los compañeros y que necesiten de “muchos” colores para que las regiones limítrofes no sean del mismo color.**

*Comenzaron esta actividad todos en el mismo momento, no tuvieron problemas en interpretarla, se trabajó en ésta unos 30 minutos, tiempo que resulta suficiente para proponer y colorear varios mapas.*

La riqueza de esta experiencia reside en que en este momento se dan cuenta de que cuatro colores alcanzan siempre, pero que en algunas situaciones es posible realizar el coloreo con 2 ó 3 colores. Se generó en distintos grupos una competencia, creemos que muy sana por cierto, para ver quien resolvía mejor y más rápido, y en este juego de desafíos se inventaron mapas para que otro compañero pinte. En la figura 7 mostramos, como ejemplo, dos mapas que inventaron Rosario y Giuliana y pintaron Milagros y Matías, respectivamente.





Milagros (11 años)



Matías (10 años)

Figura 7

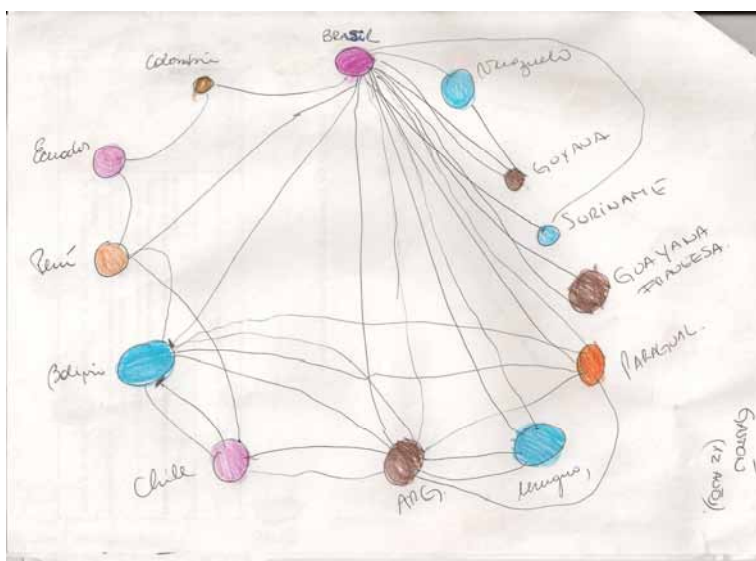
**Actividad 7: Generar estrategias para que el número de colores usado sea el mínimo, a partir de la pregunta: ¿Por dónde convendrá empezar?**

*Esta actividad se llevó a cabo en el tercer encuentro que mantuvimos con los niños, se presentaron muchos grafos y mapas, se dedicaron alrededor de 40 minutos de manera que trabajen en forma reflexiva.*

Valentina (9 años), resuelve más de 10 grafos y se mantiene firme en la hipótesis de que siempre hay que elegir para comenzar el coloreo un vértice del medio. Ante la pregunta de por qué, responde “*porque sale más fácil*”, sin poder explicitar la razón. Giuliana (10 años), mientras pintaban mapas y todavía no los habían llevado a grafos, sostenía que se debía empezar por una punta para “*no hacer lío*”. En un encuentro posterior, y posiblemente ante la insistencia de nuestra pregunta inicial, se queda un rato observando el mapa y no genera ninguna conjetura. Luego se le ofreció un grafo que ya había pintado y rápidamente dijo que le hubiera convenido empezar: “*por el 7 o por el 8 porque son los que más tienen*”, refiriéndose al grado de los vértices. En cambio, Micael (10 años) indica que conviene empezar por “*el medio e ir usando de a dos colores, uno y uno*”, esto lo indica girando alrededor como en espiral.

La estrategia que utiliza Gastón (12 años) frente al mapa de América del Sur es comenzar pintando Brasil que es el que limita con más países y pintar con el mismo color Chile y Ecuador que son los únicos que no limitan con él y tampoco limitan entre ellos; luego sigue coloreando alrededor de éste alternando dos colores hasta utilizar el cuarto color. Cabe destacar que tanto esta experiencia como la realización del grafo que representa al mapa le ocuparon poco tiempo y no le presentó dificultad alguna. Posteriormente, se le pidió que coloreara los vértices del grafo utilizando la menor cantidad posible de colores sin mirar lo hecho anteriormente y nuevamente comenzó pintando Brasil y luego, con distinto color los que se unen con él. Con esta actividad asegura que para colorear hacen falta 4 colores, no tres, que es lo que él sospechaba en un comienzo. Cabe aclarar que existe un subgrafo de orden 4 completo, determinado por Argentina, Paraguay, Bolivia y Brasil. En la figura 8 se muestra el grafo realizado por Gastón, que representa a los países de América del Sur con sus límites. El niño podría haber realizado un grafo plano, pero como no habíamos trabajado planaridad con ellos era de esperar que no lo dibujara de esa manera.





Gastón (12 años)

Figura 8

Romina (14 años) y Rosario (13 años) realizaron las mismas actividades que hizo Gastón. Lo hicieron también en forma rápida y formularon estrategias similares a las de él. Milagros (11 años) trabajó de forma similar pero con mapas con menor cantidad de países limítrofes. Como en los casos anteriores fue explicando la secuencia de colores asignados y el porqué de esa decisión. Romina retomó el trabajo realizado por ella que se presentó en figura 4 y fue explicando el procedimiento tenido en cuenta para pintarlo.

**Actividad 8: Construir mapas que respondan a grafos entregados previamente.**

*Se entregaron distintos grafos. A pesar de que todos eran planares, algunos estaban representados con intersecciones superfluas entre las aristas. Se destinaron 30 minutos para esta actividad, con la que finalizó este tercer encuentro.*

Se trata de un desafío que apunta claramente a trabajar la reversibilidad del pensamiento, a comprender la dualidad existente entre mapas y grafos. A los 10 años todavía en general, lo realizan por ensayo y error, sobre grafos sencillos. En edades posteriores, se organizan mentalmente antes de empezar a dibujar regiones. También pueden comparar entre ellos los mapas hallados, lo que es sumamente fructífero para los niños, ya que “Ser capaz de explicar lo que uno piensa, dando razones, es una destreza importante para el razonamiento formal” (NCTM 2003; p. 127).

En esta situación podemos decir que los alumnos se encuentran en el 4.º y 5.º nivel de la taxonomía de Bloom, pues realizan inferencias y encuentran generalizaciones y también compilan información y relacionan con nuevos patrones.

**Actividad 9: ¡Ya no estamos en el plano! Colorear mapas sobre pelotas, cubos y cintas de Moebius, siempre intentando hacerlo con el mínimo número de colores para cumplir la consigna inicial.**

*En esta actividad, con la que comenzó el cuarto encuentro duró aproximadamente una hora. Se trabajó con numerosos cuerpos: pelotas de telgopor, cajas de cartón forradas y cintas de Moebius hechas de papel. En algunos de ellos había mapas ya realizados y en otros no.*

Otra vez tuvimos el desafío de experimentar y disfrutar de este gran interés que despierta en los niños todo aquello que tiene que ver con lo lúdico, y no por eso menos formativo. La propuesta es clara, consiste en encontrar regularidades. La hipótesis: “seguro que aquí cuatro colores no alcanzan”, asociándolo al hecho que “se juntan a veces dos regiones por los bordes al dar la vuelta a la pelota”, por ejemplo.

En un primer momento pintaban los mapas ya realizados sobre estos cuerpos y luego debían construir mapas “difíciles” para que el compañero pinte. La sorpresa nuevamente estuvo presente, ya que nadie logró construir alguno tan difícil que no alcancen cuatro colores. Fueron muchos los intentos y muchos también los planteos realizados por ellos. En esta actividad trabajaron en grupos, todos opinaban, conjeturaban y definían cómo realizar el coloreo para minimizar la cantidad de colores, pero pintaban los niños más grandes. Al pintar sobre telgopor y cartón debieron utilizar témperas.

Se muestran una esfera y un cubo coloreados en la figura 9.



Figura 9

#### Actividad 10: Finalmente, los mapas sobre toroides.

*Esta actividad demoró bastante más de lo previsto, por lo que el tiempo total de este encuentro fue aproximadamente de dos horas. Nuevamente, disponíamos de numerosos toroides de telgopor de variados tamaños.*

Creemos que a partir de lo que sucedió en la actividad anterior, ahora la hipótesis inicial de ellos fue: “Aquí también alcanzan cuatro colores”. Este es un cuerpo geométrico que fundamentalmente, y es lo que aquí nos interesa, tiene un “agujero”. Aquí fue donde los chicos se dieron cuenta que todos los cuerpos trabajados anteriormente tenían una característica común: la de “no tener agujeros”. Ahora sí aparecieron ejemplos donde no alcanzan cuatro colores. Esto resultó muy interesante, pues permite analizar propiedades y determinar atributos de objetos, encontrar formas que han visto en lo cotidiano y asociarlas a la geometría. Debemos destacar que no se profundizó demasiado en esta actividad y tampoco se llegó a que los niños determinen que la cantidad máxima de colores para pintar la superficie de un toroide es igual a siete. En este caso nos interesaba, sobre todo y como dijimos en el párrafo anterior, que los chicos reconozcan otro tipo de cuerpos en la geometría.





Figura 10

### 3.3. Observaciones generales de los encuentros

Como en varios de los encuentros que se llevaron a cabo había chicos de distintas edades, en muchas oportunidades se produjo el efecto “contagio”, y, por ejemplo Pablo (de 6 años), quiso hacer los grafos a partir de mapas; hizo vértices y caminos a su antojo, sin que corresponda al mapa que tenía allí, pero pidió a los más grandes que lo pinten. Manuel (de 7 años) también quiso hacerlos, y con nuestra ayuda lo logró. Cuando le pedimos que intentara hacerlo solo dijo que se había cansado y abandonó la tarea. Esto marca fuertemente las posibilidades evolutivas, pero nos parece sumamente interesante este “contagio”, pues nos da la posibilidad de explorar sin generar en ellos situaciones de exigencia. A su vez nos da la posibilidad de trabajar en las experiencias sin ponerles un techo, presuponiendo que es pequeño para una determinada actividad.

### 4. Conclusiones de las experiencias

A partir del análisis de la experiencia y de los cuatro períodos generales de desarrollo cognitivo definidos por Piaget, a saber: sensorio-motor, pre-operacional (entre 6 y 7 años), operacional concreto (inicio a partir de los 8 años) y el operacional formal (a partir de los 12 años) podemos decir que:

- A los 5 y 6 años pueden captar la consigna de pintar de colores diferentes las regiones colindantes en mapas sencillos, trabajar en ello llegando a resultados correctos, aplicando su propia lógica y estrategias acorde a sus edades.
- A los 7 y 8 años ya pueden traducir al lenguaje de grafos y comenzar a analizar el coloreo, encuentran la relación entre mapas y grafos.
- Entre los 9 y 11 años pueden generar hipótesis sencillas y empezar a intuir que existen algoritmos para trabajar con menor esfuerzo, ellos mismos generan sus propios algoritmos, de acuerdo a la Teoría de Landa: “enseñar a los alumnos a descubrir procesos es más valioso que dárselos ya formulados”. Se notó que ya pueden generar hipótesis con justificaciones un poco más precisas que en el período de desarrollo cognitivo anterior.
- A partir de los 12 años, se puede observar que captan estos conceptos con bastante claridad y trabajan siempre de manera reflexiva, con una hipótesis previa, acertada o no, pero ya se ha abandonado casi por completo el ensayo y error. Es una característica fundamental de este período cognitivo: en él pueden realizar deducciones lógicas y son capaces de manejar distintas construcciones mentales.

Por último, enunciaremos a continuación algunos algoritmos de pintado de mapas y/o grafos que detectamos a partir de los procedimientos que utilizaron los niños para colorear:

Algoritmo 1: Ante un grafo, empezar pintando el vértice más concurrido (de mayor grado) y luego, del mismo color, todos los que no se relacionan con él. Después, de entre los que quedan sin pintar, elegir nuevamente el más concurrido y repetir el proceso hasta terminar.

Algoritmo 2: Elegir el vértice de mayor grado y marcar de un color, si hay otro del mismo grado o de un grado inmediato inferior que se relacione con el primero, pintar de otro color. Luego agotar todas las posibilidades con dos colores, para luego usar un tercero o cuarto si hiciera falta.

Algoritmo 3: Buscar un vértice que se encuentre en la región central, y pintar del mismo color todos los que no se relacionan con él. Luego elegir dos colores más e ir alternando hasta completar; si hace falta uno más, usarlo por último.

Es importante aclarar que, independientemente de la estrategia utilizada, los niños más grandes analizan, en general, posibles cambios de colores sobre los últimos vértices con el fin de disminuir el número de ellos, a no ser que hayan partido de esa cantidad como la menor posible.

## 5. Reflexiones finales

Marta Stone Wiske (1999, p. 23), nos dice: “En las últimas décadas, los teóricos del aprendizaje han demostrado que los alumnos no recuerdan ni comprenden gran parte de lo que se les enseña. Para comprender ideas complejas y formas de investigación, los estudiantes deben aprender haciendo y deben cambiar activamente su opinión. Las nuevas normas curriculares establecidas por educadores en una amplia variedad de temas exigen que el trabajo escolar se centre en el desarrollo conceptual, el pensamiento creativo, la resolución de problemas y la formulación y comunicación de argumentos atractivos”.

Nosotras creemos que nuestra manera de trabajar se adhiere a lo antes citado, porque estamos trabajando con contenidos no curriculares, que no están en los textos que los alumnos manejan y que podemos abordar sin un camino predeterminado y movernos a ritmos diferentes, permitiendo a cada chico expresar sus intereses personales y avanzar con el contenido mientras lo desee y su potencial evolutivo se lo permita. Esto enriquece las experiencias. Cuando el alumno no puede continuar avanzando porque tropieza con dificultades evolutivas pierde interés, pero se le propone otra gama de posibilidades, con la cual se van abriendo nuevos caminos de pensamiento y de acción.

También es muy importante saber escuchar sus propuestas, ya que los chicos son creativos por naturaleza, y son muy osados para generar hipótesis. Pero se aprende tanto de las que resultan verdaderas, como de aquellas que son falsas, para las que debemos buscar argumentos valederos o contraejemplos. Lo importante aquí es animarse a enfrentar la búsqueda. Es verdad que no se encuentra gran cantidad de material sobre este tema para enseñar a niños y a jóvenes, y mucho menos al alcance del docente que no es especialista en el área, pero no es ésta una razón válida para desecharlo en la enseñanza. Nosotros podemos investigar y aprender, para poder transmitir el placer de descubrir y el gusto por la novedad. Por eso invitamos a los docentes a realizar la experiencia, para que los alumnos vayan generando y utilizando procedimientos que muchas veces se dejan de lado y son tan formadores del pensamiento matemático como otros.

Hasta aquí hemos llegado, seguramente hay mucho aún por descubrir, volveremos atrás con las experiencias para analizar otros aspectos y comparar ajustando detalles. Pero lo que queremos transmitir es esta mirada sobre la matemática, que tiene muchas facetas y algunas de ellas muy



estimulantes para los alumnos. Se puede aprender jugando, se puede disfrutar de la sorpresa, siempre que el docente juegue el papel de guía, descubriendo y aprendiendo en el camino.

### Bibliografía

- Appel, K. y Haken, W. (1989). *La solución del problema de los cuatro colores*. Investigación y Ciencia. Número 15. págs. 78-91. Buenos Aires. Argentina.
- Braicovich, T. (2005). *Introducción de algunos conceptos de grafos en Tercer Ciclo de Educación General Básica*. Universidad Nacional del Comahue. Neuquén.
- Braicovich, T.; Caro, P.; Cerda, V.; Osio, E.; Oropeza, M.; Reyes, C. (2009). *Introducción a la Teoría de Grafos*. Editorial Educo. Neuquén.
- Coriat, M. *Algunos usos escolares de los grafos*. (2004). Revista de Didáctica de la Matemáticas. Universidad Complutense de Madrid.
- Chartrand, G. (1985). *Introductory Graph Theory*. Dover, Nueva York.
- Chiappa, R. (1989). *Algunas motivaciones históricas de la Teoría de Grafos*. Revista de Educación Matemática. Vol 1. N° 4. Unión Matemática Argentina. Córdoba.
- Fowler, B. *La taxonomía de Bloom y el pensamiento crítico*. Missouri. Estados Unidos. En <http://www.eduteka.org/profeinvitad.php3?ProfInvID=0014>, Recuperado el 10/02/09.
- Guzmán, M. (1984). *Juegos matemáticos en la enseñanza*. Actas de las IV Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas.
- National Council of Teachers of Mathematics. *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. (2003). Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. Sevilla. España.
- Ore, O. (1981) *Graphs and their uses*. Mathematical Association of America. DLS-Euler. Editores. Madrid.
- Piaget, J. (1964). *Seis estudios de psicología*. Ed. Planeta. Barcelona.
- Rosentein, J., Franzblau, D., Roberts, F. Editores. (1997). *Discrete Mathematics in the Schools*. Dimacs. Volumen 36 American Mathematical Society National Council of Teachers of Mathematics.
- Stone Wiske, M. (1999). *La enseñanza para la comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica*. Colección *Redes de Educación* dirigida por Paula Pogré. Ed. Paidós.
- Wilson, R. (1979). *Introduction of Graph Theory*. Longman. New York.

**Teresa Claudia Braicovich.** Nacida en Cipolletti, Argentina en el año 1962. Ingeniero Civil y Magíster en Enseñanza de las Ciencias, orientación matemática, con especialidad en Diseño Curricular e Investigación Educativa por la Universidad Nacional del Comahue (U.N.Co.) Argentina. Profesora desde el año 1988 del Dpto. de Matemática de la U.N.Co. Directora del Proyecto de Investigación en matemática pura "El Operador line sobre grafos cordales y de comparabilidad". Codirectora, en el período 2009-2011, de la Revista Iberoamericana de Educación Matemática UNION. Cuenta con publicaciones y numerosas presentaciones en congresos nacionales e internacionales, en términos de comunicaciones, talleres, cursos, reportes de investigación y conferencias.  
[teresabraicovich@jetband.com.ar](mailto:teresabraicovich@jetband.com.ar).

**Raquel María Cognigni.** Nacida en Córdoba, Argentina en el año 1960. Profesora de Enseñanza Media y Superior en Matemática, Física y Cosmografía por la Universidad Nacional de San Luis. Profesora del Dpto. de Matemática de la U.N.Co. Integrante del Proyecto de Investigación en matemática pura "El Operador line sobre grafos cordales y de comparabilidad". Cuenta con publicaciones en el área de educación, presentaciones en ferias de ciencias y en congresos nacionales e internacionales, en términos de comunicaciones, talleres y cursos.