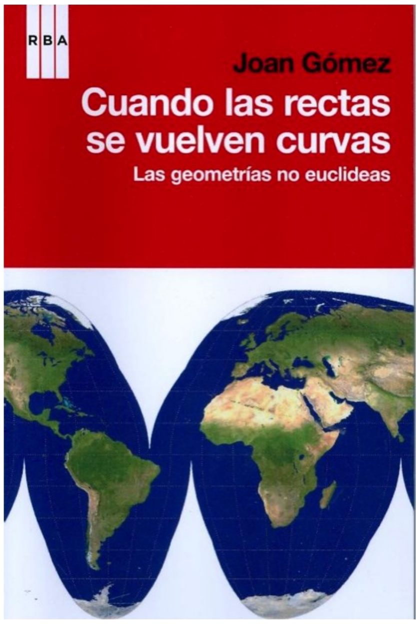
NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 85, marzo de 2014, páginas 179-181

# Cuando las rectas se vuelven curvas

## Las geometrías no euclídeas

**Joan Gómez**




**EDITORIAL RBA**

**ISBN: 9788498678567**

**160 páginas**

Durante unos dos mil años, los matemáticos europeos vieron la geometría a través de los ojos de Euclides gracias a su magna obra *Elementos de geometría*. El tratamiento elegante que el matemático griego hizo de esta disciplina propició que ésta fuera durante muchos años la rama fundamental del saber matemático y fue determinante en la forma en la que se ha enseñado geometría en los colegios, incluso hasta el día de hoy.

El enfoque de Euclides es riguroso: introduce una serie de definiciones, axiomas y postulados, y a partir de ellos obtiene todas las proposiciones. Sin embargo, desde muy pronto este tratamiento no se consideró perfecto. Los matemáticos empezaron a sospechar que uno de los postulados, el quinto[1], no era independiente de los demás, sino que podía ser deducido a partir de ellos. Innumerables intentos de ilustres matemáticos hicieron creer finalmente en la posibilidad de que este postulado fuera en realidad independiente de los otros cuatro. De esta forma se llegó al convencimiento de que se podían establecer “otras geometrías”, resultantes de los cuatro primeros postulados y la negación del quinto (y que son perfectamente coherentes desde el punto de vista lógico). Éstas son las llamadas *geometrías* *no euclídeas*. Joan Gómez, en su libro *Cuando las rectas se vuelven curvas*, presenta una introducción de dichas geometrías, a nivel elemental.

El libro comienza exponiendo la llamada "geometría del taxi", derivada de la "distancia del taxi". La intención es mostrar que es posible ver las cosas desde otro punto de vista si se cambia la forma de medir distancias, preparando al lector para lo que está por venir.

A continuación se realiza un recorrido por la geometría euclídea, enunciando las principales definiciones y axiomas, y por supuesto los postulados. Mención aparte merece, naturalmente, el quinto:

> [1] "Si una línea recta corta dos rectas de forma que los ángulos interiores de un mismo lado son menores que dos ángulos rectos, las dos líneas rectas, prolongadas indefinidamente, se encuentran en el lado en el cual los ángulos son menores que dos ángulos rectos".

Se proporcionan asimismo algunas propiedades equivalentes a este postulado; la más célebre de ellas, debida a John Playfair, es la que en muchos textos se toma como quinto postulado y establece que:

> "Por un punto exterior a una recta se puede trazar una única recta paralela a ella"

El tercer capítulo está dedicado a comentar varios intentos de demostración del quinto postulado a partir de los cuatro primeros. En particular, se citan los de Proclo, Omar Khayyam, Christopher Clavio, John Wallis y Gerolamo Saccheri. Este último probó numerosos resultados consecuencia de negar el quinto postulado con idea de alcanzar una contradicción que nunca llegó, pero no fue más allá porque para él todos ellos eran "contra natura".

No fue hasta la aparición de Nikolai Lobachevski y János Bolyai que se empezó a tener serias dudas de que el quinto postulado fuera en realidad dependiente de los otros (si bien Carl Friedrich Gauss ya había considerado esta idea, aunque nunca se atrevió a hacerla pública). Ellos lo negaron sustituyéndolo por este otro: "*por un punto exterior a una recta pasan infinitas paralelas a ésta*" y desarrollaron una geometría perfectamente lógica que hoy lleva el nombre de *geometría hiperbólica,* también muchas veces conocida como *geometría de Lobachevski*. Para ilustrar esta geometría se introducen la *seudoesfera* y el círculo hiperbólico, espacios en los que se dan los postulados de la geometría hiperbólica. A renglón seguido se considera la *geometría elíptica*, debida a Bernhard Riemann (esta es la geometría propia de una esfera, por ejemplo).

Se efectúan ciertas comparaciones entre las tres geometrías (euclídea, hiperbólica y elíptica), destacándose sobre todo sus diferencias. A modo de ejemplo, citemos dos de las más llamativas. La primera de ellas está relacionada con la suma de los ángulos interiores de un triángulo que, como es bien sabido, es siempre de 180 grados en la geometría euclídea. Esta suma es inferior a 180 grados en la hiperbólica y superior a 180 grados en la elíptica, y de hecho depende del área del triángulo. La segunda de las diferencias que muestra este libro entre las tres geometrías tiene que ver con el concepto de triángulos semejantes: estos solamente existen en la geometría euclídea. En las otras, dos triángulos cuyos ángulos son iguales son automáticamente iguales (congruentes). Es decir, no hay triángulos con la misma forma y distinto tamaño.

Para poder medir en la geometría hiperbólica se definen las funciones trigonométricas hiperbólicas, y con su ayuda se establecen algunos resultados destacados de esta geometría. Por ejemplo la fórmula para la longitud de una circunferencia de radio $r$ resulta ser

$$\text{Longitud} = 2\pi k \, senh\left(\frac{r}{k}\right)$$

donde $k$ es una constante de proporcionalidad y $senh$ es la función *seno hiperbólico*, definida por $senh\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. También se consideran las versiones correspondientes del teorema de Pitágoras y los teoremas del seno y del coseno.

Finalmente, se dedica un capítulo a la *geometría elíptica*, concentrándose en el caso particular de la esfera. Después de introducir la terminología de meridianos y paralelos en la misma, se centra la atención en los triángulos esféricos, destacando la propiedad importante anteriormente reseñada de que la suma de sus ángulos es mayor que 180 grados.

El libro concluye con un apéndice en el que se menciona la relación de las geometrías no euclídeas con la teoría de la relatividad, puesto que Einstein usó las ideas de Riemann para explicar su teoría: el universo es un espacio cuatridimensional, que se curva en cada punto por efecto del campo gravitatorio.

En mi opinión, el libro es bastante ameno y constituye una asequible incursión a nivel elemental en el mundo de las geometrías no euclídeas y su origen histórico. Las explicaciones son en general claras y concisas y los capítulos 3 y 5 son bastante sugestivos. Sin embargo, los capítulos 7 y 8, siendo interesantes en sí mismos, me parecen un tanto desligados del resto del libro, puesto que la presencia de la geometría en ellos es meramente testimonial. Pero en conclusión encuentro que este libro es una lectura recomendable para los lectores interesados en la geometría en general.

***Jorge García Melián*** (Universidad de La Laguna)